BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2011

Concepteur : ESSEC

Code épreuve :

281

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES

Mardi 10 mai 2011 de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le problème comporte cinq parties.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}[X]$ celui des polynômes à coefficients réels.
Si n est un entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on notera $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Si U est une partie non vide de $L(E)$, on appelle centre de U et on note $C(U)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les éléments de U, c'est-à-dire : $C(U)=\{v\in L(E)\ /\ \forall u\in U, u\circ v=v\circ u\}$.
Si $u\in L(E)$ et $U=\{u\}$, $C(\{u\})$ est plus simplement noté $C(u)$ et est appelé aussi commutant de u. On a donc : $C(u)=\{v\in L(E)\ /\ u\circ v=v\circ u\}$.
Si $P\in\mathbb{R}[X]$ et $(a_0,\cdots,a_d)\in\mathbb{R}^{d+1}$ avec $P=a_dX^d+\cdots+a_0=\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$, on note $P(u)$ l'endomorphisme de E défini par $P(u)=a_du^d+\cdots+a_0id_E=\sum_{k=0}^{d}a_ku^k$. En particulier, $1(u)=id_E$.
Enfin, on note $\mathbb{R}[u]=\{P(u), P\in\mathbb{R}[X]\}$.
L'objectif du problème est de comparer $C(u)$ et $\mathbb{R}[u]$ dans certains cas.

Partie I – Préliminaires.

Dans cette partie, on suppose que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1, U est une partie non vide de $L(E)$ et u un élément de $L(E)$.

1) Montrer que $C(U)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$ de dimension supérieure ou égale à 1.

2) Vérifier que $C(u)$ contient $\mathbb{R}[u]$.

3) Soit λ une valeur propre de u, $E_\lambda(u)=\operatorname{Ker}(u-\lambda id_E)$ l'espace propre associé et v dans $C(u)$. Montrer que $E_\lambda(u)$ est stable par v.

Partie II – Etude d'un exemple.

Dans toute cette partie, on notera :

$$A=\left\{(a_n)_{n\geq 0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ /\ \forall x\in\left]-1,1\right[,\sum_{n\geq 0}\left|a_nx^n\right| \text{ converge}\right\},$$

$$B=\left\{(a_n)_{n\geq 0}\in A\ /\ \forall n\in\mathbb{N},\ 2a_{n+3}+3a_{n+2}-a_n=0\right\},$$

$$H=\left\{f:x\in\left]-1,1\right[\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \text{ où } (a_n)_{n\geq 0}\in A\right\},$$

$$E=\left\{f:x\in\left]-1,1\right[\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \text{ où } (a_n)_{n\geq 0}\in B\right\},$$

$$\alpha_n=\frac{1}{2^n},\ \beta_n=(-1)^n \text{ et } \gamma_n=n(-1)^n,$$

$$\varphi:x\in\left]-1,1\right[\mapsto\frac{1}{2-x},\ \psi:x\in\left]-1,1\right[\mapsto\frac{1}{1+x} \text{ et } \delta:x\in\left]-1,1\right[\mapsto\frac{1}{(1+x)^2}.$$

On admet que pour f dans H, il existe une unique suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans A telle que :

$\forall x\in\left]-1,1\right[, f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

4) Quelques propriétés de A :

a) Vérifier que la suite constante égale à 1 appartient à A.

b) Plus généralement, si $(a_n)_{n\geq 0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, telle qu'il existe $s\in\mathbb{R}$ vérifiant : $a_n=o(n^s)$, montrer que $(a_n)_{n\geq 0}\in A$.

c) En déduire que les suites $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, $(\beta_n)_{n\geq 0}$ et $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ appartiennent à A.

5) Premières propriétés de H :

a) Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de $\left]-1,1\right[$ dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que les fonctions φ, ψ et δ appartiennent à H.

6) Premières propriétés de E :

a) Déterminer les suites géométriques appartenant à B.

b) Vérifier que la suite $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ appartient à B.

c) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de H contenant les fonctions φ, ψ et δ.

7) Caractérisation des éléments de E :

Soit f de E telle que, pour tout x de $\left]-1,1\right[$, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, où $(a_n)_{n\geq 0}\in B$.

a) Montrer que : $\forall x\in\left]-1,1\right[$, $f(x)(x^3-3x-2)+a_0(2+3x)+a_1(2x+3x^2)+2a_2x^2=0$.

b) En déduire qu'il existe une fonction polynôme Q de degré inférieur ou égal à 2 telle que, pour tout x de $]-1,1[$, $f(x)=\dfrac{Q(x)}{x^3-3x-2}$.

c) Montrer alors que f est combinaison linéaire des fonctions φ, ψ et δ.

d) Conclure que E est un espace de dimension finie dont $C=(\varphi,\psi,\delta)$ est une base.

8) L'endomorphisme u :

Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ dans B et f de E telles que : $\forall x\in]-1,1[, f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Montrer que la suite $(b_n)_{n\geq 0}$, telle que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_n=a_{n+1}$, appartient à B.

On note alors $u(f)$ l'application définie par : $\forall x\in]-1,1[, [u(f)](x)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

b) Vérifier que u est un endomorphisme de E.

c) Déterminer u^k pour tout k de $\mathbb{N}$. En déduire un polynôme π de $\mathbb{R}[X]$, de degré 3, tel que $\pi(u)=0$.

d) Déterminer la matrice T de u dans la base C et calculer T^k pour tout k de $\mathbb{N}$.

9) Eléments propres de u :

a) Quels sont les valeurs propres et sous-espaces propres de u ?

b) u est-il diagonalisable ?

10) Centre de u :

Soit v un élément du commutant de u, c'est à dire un endomorphisme de E tel que $uov=vou$.

a) Montrer qu'il existe des réels λ et μ tels que $v(\varphi)=\lambda\varphi$ et $v(\psi)=\mu\psi$.

b) Montrer qu'il existe aussi des réels η et ω tels que $v(\delta)=\eta\psi+\omega\delta$.

c) Démontrer que $\mu=\omega$.

d) Réciproquement, si v est un endomorphisme de E pour lequel il existe des réels λ, μ et η tels que $M_C(v)=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \mu & \eta\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}$, vérifier que v appartient à $C(u)$.

e) Que vaut $\dim[C(u)]$?

f) Montrer que la famille (id_E,u,u^2) est libre dans $L(E)$.

g) Comparer $C(u)$ et $\mathbb{R}[u]$.

Partie III – Centre de L(E).

Dans cette partie, on suppose que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1 et u un élément de $L(E)$.

11) On suppose que tout vecteur non nul de E est vecteur propre de u. Montrer que u est une homothétie.

12) Soit U la partie de $L(E)$ formée des projecteurs de E et v dans $C(U)$. On se donne e un vecteur non nul de E et un supplémentaire G de $F=\text{Vect}(e)$. En considérant la projection sur F parallèlement à G, montrer que v est une homothétie de E. En déduire $C(U)$.

13) Que vaut $C(L(E))$?

Partie IV- Commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

Dans cette partie, on suppose que $E=\mathbb{R}^n$ et que u est un endomorphisme diagonalisable de E.

On note $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u, $E_1,\dots,E_p$ les espaces propres correspondants et, pour tout i de $[\![1,p]\!]$, $r_i=\dim E_i$.

14) Justifier que, pour tout v de $C(u)$ et tout i de $[\![1,p]\!]$, E_i est stable par v.

15) Réciproquement, si v est un endomorphisme de E tel que, pour tout i de $[\![1,p]\!]$, E_i est stable par v, montrer que : $v\in C(u)$.

16) Considérer une base b de E adaptée à l'écriture $E=\bigoplus\limits_{i=1}^{p}E_i=E_1\oplus\cdots\oplus E_p$ et caractériser les endomorphismes de $C(u)$ par l'allure de leur matrice dans cette base.

17) En déduire que : $\dim C(u)=\sum\limits_{i=1}^{p}r_i^2$.

18) Montrer que $\dim C(u)\geq n$, puis que : $\dim C(u)=n$ si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes.

19) Ecrire la matrice M de u dans la base b. Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer M^k, puis $P(M)$ pour tout P polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

20) On note $\pi(X)=\prod\limits_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)$, que vaut $\pi(u)$?

21) Plus généralement, si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, vérifier que : $P(u)=0$ si et seulement si pour tout i de $[\![1,p]\!]$, $P(\lambda_i)=0$.

22) En déduire que la famille $(id_E,u,\dots,u^{p-1})$ est libre dans $L(E)$.

23) Montrer que : $\forall k\in\mathbb{N},\ u^k\in\operatorname{Vect}(id_E,u,\dots,u^{p-1})$. En déduire : $\dim\mathbb{R}[u]=p$.

24) Démontrer que $C(u)=\mathbb{R}[u]$ si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes.

Partie V- Centre du commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

On garde, dans cette partie, les mêmes notations et hypothèses que dans la partie IV.

On veut déterminer $C(C(u))$ que l'on notera plus simplement $C_2(u)$.

25) Vérifier que $C_2(u)\subset C(u)$.

26) Montrer que $\mathbb{R}[u]\subset C_2(u)$.

27) Pour v dans $C_2(u)$ et i dans $[\![1,p]\!]$, on note v_i l'endomorphisme de E_i défini par : $\forall x\in E_i,\ v_i(x)=v(x)$. Montrer que : $v_i\in C(L(E_i))$. En déduire qu'il existe un réel μ_i tel que : $v_i=\mu_i id_{E_i}$.

28) Montrer qu'il existe un unique polynôme Q de degré inférieur ou égal à $p-1$ tel que : $\forall i\in[\![1,p]\!],\ Q(\lambda_i)=\mu_i$.

29) Démontrer que : $C_2(u)=\mathbb{R}[u]$.