BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2009 **281**

Concepteur : ESSEC **ESSECMATS**

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES

Mercredi 6 mai de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 1. On confondra les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ (respectivement $\mathbb{R}^n$) avec leurs matrices associées dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ (respectivement $\mathbb{R}^n$). De même, on confondra les vecteurs de $\mathbb{C}^n$ (respectivement $\mathbb{R}^n$) avec les matrices colonnes qui les représentent dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ (respectivement $\mathbb{R}^n$).

Partie I

1°) Matrice à diagonale strictement dominante.

Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A vérifie la condition :

$\forall i \in [\![1,n]\!], \left|a_{i,i}\right| > \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|a_{i,j}\right|$. On dit alors que A est une matrice à diagonale strictement dominante.

a) On suppose qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ tel que $X \neq 0$, $AX = 0$ et $(\forall i \in [\![1,n]\!], |x_1| \geq |x_i|)$.

Aboutir à une contradiction en utilisant la première ligne du système $AX = 0$.

b) On suppose qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ tel que $X \neq 0$ et $AX = 0$. Aboutir à une contradiction.

c) En déduire que A est inversible.

2°) Application : le théorème de Gershgörin.

Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit :

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \right\}$. D_i est le $i^{\text{ème}}$ disque de Gershgörin de A. On pose $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

a) Montrer que le spectre de A est inclus dans D. (théorème de Gershgörin)

b) Algorithme pour n = 3 : Ecrire une procédure PASCAL qui permet à l'utilisateur de rentrer dans un tableau les 9 coefficients d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, puis écrire une fonction PASCAL qui a pour argument un tel tableau et qui renvoie les centres et les rayons des 3 disques de Gershgörin associés à la matrice contenue dans le tableau.

c) Exemple : on se donne la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(i) Justifier sans calculs que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(ii) A l'aide du théorème de Gershgörin, situer les valeurs propres de A.

(iii) Diagonaliser explicitement A.

3°) La propriété (P).

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A vérifie la propriété (P) suivante : (P)

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!], a_{i,i} > 0 \\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j,\ a_{i,j} \leq 0 \\ \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} > 0 \end{cases}.$$

a) Montrer que A est à diagonale strictement dominante et en déduire qu'elle est inversible.

b) Soit $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tel que le vecteur AX ait toutes ses coordonnées positives ou nulles.

Montrer que : $\forall i \in [\![1,n]\!], x_i \geq 0$. (On pourra considérer $x_{i_0} = \min\limits_{i\in[\![1,n]\!]} x_i$.)

c) On note $b_{i,j}$ le coefficient en position (i, j) dans la matrice inverse de A : $A^{-1} = \left(b_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$.

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, que vaut $A\begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix}$?

d) En déduire que les coefficients de A^{-1} sont tous positifs ou nuls.

e) Exemple : on reprend ici $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ et on considère pour $\alpha > 0$: $A_\alpha = A + \alpha I_3$ où I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Etablir que A_α vérifie la propriété (P) et calculer A_α^{-1}.

Partie II : convergence de suites de matrices.

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On note : $X_k = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$.

On dit que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ si pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la suite réelle $\left(x_i^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel x_i.

De même, pour $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si on note $M_k = \left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$, on dit que $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $M=\left(m_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, la suite réelle $\left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $m_{i,j}$.

1°) Généralités.

a) Pour un vecteur $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, on définit : $m(X) = \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|$.

Montrer qu'une suite de vecteurs $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers un vecteur X si et seulement si $\lim\limits_{k\to\infty} m(X_k - X) = 0$.

b) Pour une matrice $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit : $s(M) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$.

Montrer qu'une suite de matrices $(M_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers une matrice M si et seulement si $\lim\limits_{k\to\infty} s(M_k - M) = 0$.

c) Montrer que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^n, \quad m(MX) \le s(M)m(X)$.

d) En déduire que si une suite de matrices $(M_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers une matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$, la suite $(M_k X)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers MX.

e) Réciproquement, si on dispose d'une suite de matrices $(M_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et d'une matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$, la suite $(M_k X)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers MX, montrer que la suite $(M_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers M.

f) Montrer encore que : $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad s(MN) \le s(M)s(N)$.

g) Etablir maintenant que : $\forall (Y,Z) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad m(Y+Z) \le m(Y) + m(Z)$, puis en déduire que : $\forall (Y,Z) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad |m(Y) - m(Z)| \le m(Y-Z)$.

2°) Convergence de la suite des inverses.
On considère ici une suite de matrices $(M_k)_{k\in\mathbf{N}}$, toutes inversibles, qui converge vers une matrice M inversible.

a) Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^n$, montrer que :
$$m(M_k^{-1}X - M^{-1}X) \le s(M^{-1})s(M - M_k)m(M_k^{-1}X)$$
puis établir que :
$$m(M_k^{-1}X)\left[1 - s(M^{-1})s(M - M_k)\right] \le m(M^{-1}X).$$

b) En déduire l'existence d'un entier k_0 tel que pour tout entier k supérieur à k_0 :
$$m(M_k^{-1}X) \le 2m(M^{-1}X).$$

c) Montrer alors que la suite $(M_k^{-1}X)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers $M^{-1}X$.

d) Conclure alors que la suite de matrices $(M_k^{-1})_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers la matrice M^{-1}.

3°) Soient M une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une suite de matrices $(M_k)_{k\in\mathbf{N}}$ qui converge vers M. On suppose de plus que les matrices M_k vérifient toutes la propriété (P).
Montrer que les coefficients de la matrice M^{-1} sont tous positifs ou nuls.

4°) A partir de maintenant et dans toute la suite du problème, $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall i \in [\![1,n]\!], a_{i,i} = 2, \quad \forall i \in [\![1,n-1]\!], a_{i,i+1} = -1, \quad \forall i \in [\![2,n]\!], a_{i,i-1} = -1$ et les autres coefficients de A sont nuls.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \vdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, calculer (AX/X) où $(\ /\ )$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Exprimer (AX/X) sous la forme d'une somme de carrés. En déduire que A est inversible.

b) Etablir que, pour tout réel α strictement positif, la matrice $A_\alpha = A + \alpha I_n$, où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vérifie la propriété (P).

c) Construire une suite de matrices, vérifiant toutes la propriété (P), qui converge vers A.

d) En déduire que les coefficients de A^{-1} sont tous positifs ou nuls.

Partie III : résolution du système (S).

Soit une fonction f à valeurs réelles de classe C^2 sur le segment $[0,1]$. On dit qu'une fonction u vérifie le système (S) si : (S) $\begin{cases} u \in C^2([0,1],\mathbb{R}) \\ u'' = -f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$.

1°) Existence et unicité de la solution de (S).

a) Montrer que (S) admet une unique solution u de classe C^4 sur le segment $[0,1]$.

b) Montrer que si f est positive, alors l'unique solution u du système (S) associé à f est également positive.

c) Expliciter la solution $\tilde{u}$ de (S) lorsque f est la fonction constante égale à 1. Calculer $\sup\limits_{[0,1]} \tilde{u}$.

2°) On rappelle que n est un entier supérieur ou égal à 1. On pose $h = \dfrac{1}{n+1}$ et on considère la subdivision du segment $[0,1]$ formée des points $x_i = ih = \dfrac{i}{n+1}, i \in [\![0, n+1]\!]$.

a) On considère $u \in C^4([0,1],\mathbb{R})$ et $x \in [0,1]$ tel que $(x+h, x-h) \in [0,1]^2$. Justifier à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange que :

$$\left|u(x+h) - 2u(x) + u(x-h) - h^2 u''(x)\right| \leq \frac{h^4}{12} \sup_{[0,1]} \left|u^{(4)}\right|$$

b) En déduire : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\left|u''(x_i) - \dfrac{1}{h^2}\left[u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})\right]\right| \leq \dfrac{h^2}{12} \sup\limits_{[0,1]} \left|u^{(4)}\right|$.

3°) On reprend la matrice A du II-4° et on note $\tilde{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $\tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{u}(x_1) \\ \tilde{u}(x_2) \\ \vdots \\ \tilde{u}(x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

a) Réécrire les inégalités du 2°-b) dans le cas où u est la fonction $\tilde{u}$.

b) Montrer que $\frac{1}{h^2} A\tilde{U} = \tilde{F}$.

c) En déduire que les coefficients $b_{i,j}$ de la matrice A^{-1} vérifient :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], 0 \le \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \le \frac{(n+1)^2}{8} = \frac{1}{8h^2}.$$

4°) Pour $f \in C^2([0,1],\mathbb{R})$, on pose : $\forall i \in [\![1,n]\!], f_i = f(x_i)$ et $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On note u l'unique solution du système (S) associé à f.

On définit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ par $U = h^2 A^{-1} F$. On note : $\forall i \in [\![1,n]\!], \Delta u_i = u_i - u(x_i)$ et

$\Delta U = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \vdots \\ \Delta u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et enfin $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ le vecteur défini par $V = A\Delta U$.

Montrer pour $i \in [\![1,n]\!]$ que $|v_i| \le \frac{h^4}{12} \sup_{[0,1]} |f''|$.

Donner alors pour $i \in [\![1,n]\!]$ une majoration de $|\Delta u_i| = |u_i - u(x_i)|$ en fonction de h et f''.

5°) Exemple : on prend $f : x \mapsto \exp(\sin x)$.

a) Montrer que $|f''| \le 2e$. En déduire une première valeur de n qui garantit $|u_i - u(x_i)| \le 10^{-4}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

b) Etudier la fonction $x \mapsto (x^2 + x - 1)\exp(x)$ pour $x \ge 0$. En déduire une valeur de n meilleure que la précédente qui garantit encore $|u_i - u(x_i)| \le 10^{-4}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.