## MATHEMATIQUES 1

### Option scientifique

Yves Monlibert

#### Description du problème

L'épreuve avait pour thème l'étude des matrices carrées réelles avec égalité des sommes des coefficients des lignes et des colonnes; le but de ce problème était d'établir une démonstration d'un théorème dû à Birkhof: "toute matrice doublement stochastique peut s'écrire comme barycentre de matrices de permutations". Même si les matrices stochastiques n'étaient pas véritablement mises en jeu, quelques candidats ont trouvé des liens avec celles-ci , prouvant ainsi que le thème ne leur était pas inconnu

Le problème se composait de trois parties largement indépendantes mais de difficultés croissantes.

La première pour laquelle les connaissances exigées relevaient du programme de première année, devait permettre aux candidats de se familiariser avec les matrices de permutations: elle consistait à rechercher la dimension de l'espace vectoriel des matrices carrées avec égalité des sommes de coefficients de lignes et colonnes et d'établir l'existence d'une base constituée de matrices de permutations.

Dans la deuxième partie, on s'intéressait, parmi celles-ci, à celles qui plus spécifiquement comportaient des coefficients positifs. Un algorithme était proposé et permettait de les exprimer comme combinaison linéaire à coefficients positifs de matrices de permutations. Cette deuxième partie se clôturait par une application de ce résultat à l'étude des valeurs propres des matrices symétriques réelles

La troisième partie, plus délicate, permettait d'établir le résultat admis dans la partie précédente.

La grande majorité des correcteurs trouvèrent le sujet intéressant, plutôt difficile et un peu abstrait, certains le qualifièrent d'atypique pour une école de commerce. Une bonne maîtrise du calcul matriciel et de l'algèbre bilinéaire était requise pour comprendre les concepts développés. Ils suggèraient qu'un texte plus progressif, avec quelques indications supplémentaires sur les questions les plus délicates auraient pu permettre à un plus grand nombre de candidats de dévoiler leurs compétences.

#### Commentaires sur la correction

D'un point de vue général, l'épreuve faisait ressortir chez bon nombre de candidats:

- de graves manques de rigueur dans les raisonnements (confusion entre inclusion et égalité, entre anayse et synthèse) et des incohérences de rédaction
- un manque de maîtrise inquiétant du calcul matriciel et de la manipulation des sommations
- d'importantes lacunes sur les structures euclidiennes: méconnaissance de la décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée

Dans la partie I, dès la première question, les difficultés commencèrent pour les candidats les plus faibles: des affirmations du type " $MU = {}^tMU \Rightarrow M = {}^tM$ " ne furent pas rares.

La question suivante 1)c/ fût peu correctement traitée: les candidats utilisent mal l'interversion des sommations et effectuent souvent des changements d'indices illicites; seuls les meilleurs pensèrent à utiliser la caractérisation précédente.

Au I/2), l'aspect générateur de la famille $(A_{r,s})$ ne fût pratiquement pas abordé; il est vrai que la rédaction de la solution n'était pas dépourvue de difficulté. En revanche la dimension fût fréquemment donnée