Concours 2019

LES LIVRETS

DE PRAGMATHIQUES PRÉPA

DES FICHES DE COURS

SUITES

FICHE DE COURS

1er Semestre

II] Suites de nombres réels

On présentera des exemples issus du monde économique (capital et taux d'intérêt, emprunt à annuités constantes). Ce chapitre fournira l'occasion d'illustrer le raisonnement par récurrence.

Définitions, notations

Soit $I \subset \mathbb{N}$. Une suite de nombres réels u est l'application $u : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto u_n = u(n) \end{array}$

On note la suite u ou (u_n) ou $(u_n)_{n\in I}$.

Suite arithmétique, suite géométrique

Suite arithmétique

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et soit la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ telle que :

$\forall\, n \geq n_0 : u_{n+1} = u_n + r$, avec $r \in \mathbb{R}$ indépendant de n.

(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} .

Forme explicite d'une suite arithmétique

$\forall\, n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} + (n - n_0)\, r$

Cas particuliers

Si le premier terme de la suite est u_0 : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$

Si le premier terme de la suite est u_1 : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_1 + (n-1)\, r$

Suite géométrique

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et soit la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ telle que :

$\forall\, n \geq n_0 : u_{n+1} = q \times u_n$, avec $q \in \mathbb{R}$ indépendant de n.

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} .

Forme explicite d'une suite géométrique

$\forall\, n \geq n_0 : u_n = q^{n-n_0} \times u_{n_0}$

Cas particuliers :

Si le premier terme de la suite est u_0 : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n \times u_0$

Si le premier terme de la suite est u_1 : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = q^{n-1} \times u_1$

Calculs de sommes portant sur les suites arithmétiques et géométriques

Somme des termes d'une suite arithmétique

$$NT \times \frac{1T + DT}{2}$$

Avec $NT =$ nombres de termes (dernier indice – premier indice $+ 1$)

$1T = 1^{\text{er}}$ terme

$DT =$ dernier terme

Exemples :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k &= (n+1) \times \frac{0+n}{2} \\ &= \frac{n\,(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Somme des termes d'une suite géométrique

$$\begin{cases} 1T \times \dfrac{1 - q^{NT}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ 1T \times NT & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Avec $NT =$ nombres de termes (dernier indice – premier indice $+ 1$)

$1T = 1^{\text{er}}$ terme

Exemples :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ u_0 \times (n+1) & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

$$q^0 = 1 \text{ donc } \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n+1) & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Suite arithmético-géométrique

Définition

La suite (u_n) est **arithmético-géométrique** lorsqu'il existe un réel a différent de 1 et un réel b différent de 0, a et b indépendants de n, tels que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a\, u_n + b$.

Remarque

Si $b = 0$ la suite est géométrique, et si $a = 1$, la suite est arithmétique

Les étudiants devront se ramener au cas d'une suite géométrique.

$a \neq 1$ donc $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tel que : $c = ac + b$

$$\begin{aligned} c = ac + b &\iff c - ac = b \\ &\iff (1-a)\, c = b \\ &\iff c = \frac{b}{1-a} \end{aligned}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = a\, u_n + b$$
$$c = ac + b$$

Et en soustrayant les deux équations :

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - c &= a\, u_n + b - ac - b \\ &= a\, u_n - ac \\ &= a\,(u_n - c) \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a et de premier terme $u_0 - c$

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n - c = a^n\,(u_0 - c)$

$$u_n = a^n\,(u_0 - c) + c$$

Forme explicite d'une suite arithmético-géométrique

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$$

Remarque

Dans le cas où la suite u est définie sur $\mathbb{N}^*$ on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = a^{n-1} \left(u_1 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$$

Dans le cas où le premier terme de la suite u est u_{n_0} on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \qquad u_n = a^{n-n_0} \left(u_{n_0} - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$$

DES FICHES MÉTHODES

1) Calculer la somme des termes d'une suite géométrique

Soit la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{si } k \in \mathbb{N}^* \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{si } k = 0 \end{cases}$

Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = 1$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Et donc par définition :

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Comme $\frac{1}{2} \neq 1$, en reconnaissant la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\left(\frac{1}{2}\right)^1$ on a :

$$u_k = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 1$$

On a bien :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = 1}$$

2) Donner la forme explicite d'une suite arithmético-géométrique

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = 3\,u_n - 1 \end{cases}$

Donner la forme explicite de la suite (u_n).

$$\begin{aligned} c = 3c - 1 &\Leftrightarrow c - 3c = -1 \\ &\Leftrightarrow -2c = -1 \\ &\Leftrightarrow c = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} = 3\,u_n - 1$

$c = 3c - 1$

Et en soustrayant les deux égalités :

$u_{n+1} - c = 3\,u_n - 1 - 3c + 1$

$u_{n+1} - c = 3\,(u_n - c)$

Donc la suite $(u_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 - c$ avec :

$$\begin{aligned} u_0 - c &= 2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(4-1) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Donc d'après le cours :

$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n - c = q^n\,(u_0 - c)$

$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n - \frac{1}{2} = 3^n \times \frac{3}{2}$

$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{3^{n+1}}{2} + \frac{1}{2}$

Donc :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 1)}$$

DES CORRECTIONS DÉTAILLÉES

Correction

1)

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n + v_n = 2$ »

(i)

$$u_0 + v_0 = 1 + 1$$
$$= 2$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

(ii)

Soit $n \in \mathbb{N}$, un entier naturel fixé.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Par définition :

$$u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n$$
$$= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)u_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\ v_n$$
$$= u_n + v_n$$

Et donc par hypothèse de récurrence :

$$= 2$$

(iii)

Donc d'après (i) et (ii), on a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Donc :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n + v_n = 2}$$

2) a)

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = v_{n+1} - \frac{4}{5}$$
$$= \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n - \frac{4}{5}$$
$$= \frac{1}{6}(2u_n + 3v_n) - \frac{4}{5}$$
$$= \frac{1}{6}(2u_n + 2v_n + v_n) - \frac{4}{5}$$
$$= \frac{2}{6}(u_n + v_n) + \frac{1}{6}v_n - \frac{4}{5}$$

Et d'après 1) :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{2}{6} \times 2 + \frac{1}{6} v_n - \frac{4}{5} \\ &= \frac{4 \times 5}{6 \times 5} + \frac{1}{6} v_n - \frac{4 \times 6}{6 \times 5} \\ &= \frac{1}{6}\left(v_n + \frac{20}{5} - \frac{24}{5}\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(v_n - \frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{1}{6}\, x_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= v_0 - \frac{4}{5} \\ &= 1 - \frac{4}{5} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est la suite géométrique de raison } q = \frac{1}{6} \text{ et de premier terme } x_0 = \frac{1}{5}}$$

2) b)

D’après le cours sur les suites géométriques :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{aligned} x_n &= q^n \times x_0 \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad x_n = \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{1}{5}}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = x_n + \frac{4}{5}$$

Donc :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{1}{5} + \frac{4}{5}}$$

D’après 1) :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{aligned} u_n &= 2 - v_n \\ &= 2 - \frac{4}{5} - \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{10 - 4}{5} - \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{6}{5} - \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{1}{5} \end{aligned}$$