ESSEC 2003, Math 1, option S.

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel et par :
• $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions-polynômes de degré inférieur ou égal à n.
• $C^n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe C^n sur $\mathbb{R}$.
En particulier, $C^0(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$.
A toute fonction f appartenant à $C^0(\mathbb{R})$, on associe l'application notée ϕf définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\phi f(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On définit ainsi un endomorphisme ϕ de l'espace vectoriel $C^0(\mathbb{R})$ dont on se propose dans la suite d'étudier quelques propriétés au travers de parties qui sont largement indépendantes.

Partie I: Généralités.

1) Dans cette question, on étudie quelques propriétés de ϕf en fonction de celles de f.

a) Prouver l'égalité suivante, pour toute fonction continue f et tout nombre réel x :

$$\phi f(x) = \int_0^1 f(x+u-1)\,\mathrm{d}u$$

b) On suppose la fonction f paire (resp. impaire). Exprimer $\phi f(-x)$ en fonction de $\phi f(x+1)$.

c) On suppose la fonction f croissante (resp. décroissante). Est-ce le cas de ϕf ?

d) On suppose la fonction f convexe (resp. concave). Est-ce le cas de ϕf ?

e) On suppose que la fonction f a une limite L en $\pm\infty$. Est-ce le cas de ϕf ?

2) Dans cette question, on étudie l'endomorphisme induit par ϕ sur $\mathbb{R}_n[x]$.

a) Montrer que $\mathbb{R}_n[x]$ est stable par ϕ. On note alors ϕ_n l'endomorphisme induit par ϕ sur $\mathbb{R}_n[x]$.

b) Déterminer la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

c) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de ϕ_n.

3) Dans cette question, on étudie l'injectivité et la surjectivité de ϕ.

a) Montrer, pour toute fonction f de $C^0(\mathbb{R})$, que ϕf est de classe C^1 et préciser sa dérivée. Pour quelles valeurs du nombre entier j l'espace vectoriel $\phi\big(C^k(\mathbb{R})\big)$ est-il inclus dans $C^j(\mathbb{R})$?

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(\phi)$ est formé des fonctions 1-périodiques et d'intégrale nulle sur une période.

c) L'endomorphisme ϕ est-il surjectif ? injectif ?

4) Dans cette question, on étudie les éléments propres de ϕ.

a) On considère une valeur propre λ, de l'endomorphisme ϕ, autrement dit un nombre réel λ tel qu'il existe une fonction non nulle f appartenant à $C^0(\mathbb{R})$ vérifiant $\phi f = \lambda f$.
Montrer que toute fonction propre f associée à une valeur propre $\lambda \neq 0$, c'est-à-dire toute fonction continue non nulle f telle que $\phi f = \lambda f$, est nécessairement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Quelles sont les fonctions-polynômes f qui sont fonctions propres de ϕ ?

c) Montrer, pour tout nombre réel $\lambda > 0$, qu'il existe une et une seule fonction exponentielle f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ $\quad (a \in \mathbb{R})$ telle que $\phi f = \lambda f$.
En déduire que tout nombre réel $\lambda > 0$ est valeur propre de ϕ.

d) Montrer, pour tout nombre réel $\lambda > 1$, que la seule fonction bornée f appartenant au sous-espace propre associé à λ est la fonction nulle.
Dans la suite du problème, on étudie le sous-espace propre $E_1(\phi)$ associé à la valeur propre 1, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions continues f vérifiant $\phi f(x) = f(x)$ pour tout nombre réel x, ou :

$$\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$

Partie II: Existence d'une fonction non constante dans $E_1(\phi)$

1) On considère la fonction f_0 définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par $f_0(0) = f_0(1) = 0$ et pour $0 < x < 1$ par :

$$f_0(x) = (x - \frac{1}{2}) \exp(\frac{1}{x(x-1)})$$

a) Montrer que la courbe représentative de f_0 admet pour centre de symétrie le point $(1/2, 0)$.

b) Montrer que f_0 est de classe C^1 sur $[0,1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 f_0(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

2) On définit alors par récurrence à partir de f_0 une suite de fonctions (f_n) définies sur $[0,1]$ par :

$$f_{n+1}(x) = f_n(1)\exp(x) - \exp(x)\int_0^x f_n(t)\exp(-t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f_{n+1} est de classe C^1 sur $[0,1]$ et vérifie $(f_{n+1})' = f_{n+1} - f_n$. En déduire que :

$$f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0) = \int_0^1 \big(f_{n+1}(t) - f_n(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que $f_{n+1}(0) = f_n(1)$. En déduire que :

$$f_n(1) = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

c) Etablir enfin, pour tout nombre réel x de $[0,1]$, que $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

d) On note f l'application définie sur chaque intervalle $[n, n+1[$ où $n \in \mathbb{N}$ par $f(x) = f_n(x-n)$. Ainsi, la fonction f est définie sur la réunion de ces intervalles $[n, n+1[$, et donc sur $[0, +\infty[$. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et vérifie $f(x) = \displaystyle\int_{x-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout nombre réel $x \geqslant 1$.

3) On prolonge la fonction f définie ci-dessus sur $[0, +\infty[$ en une fonction définie sur $[-1, +\infty[$. A cet effet, on pose $f(x) = f(x+1) - f'(x+1)$ pour $-1 \leqslant x < 0$.
Montrer que f est continue sur $[-1, +\infty[$ et vérifie $f(x) = \displaystyle\int_{x-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout nombre réel $x \geqslant 0$.
En réitérant ce même procédé sur $[-2, +\infty[, [-3, +\infty[$, etc, on obtient une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\phi f(x) = f(x)$ pour tout nombre réel x (on ne demande pas d'expliciter ce raisonnement).

Partie III: Limite en $+\infty$ d'une fonction de $E_1(\phi)$

On désigne toujours par f une application de $E_1(\phi)$ et par n un nombre entier naturel.

1) On étudie dans cette question les suites (M_n) et (m_n) des maxima et minima de f sur $[n, n+1]$.

a) Justifier l'existence du maximum M_n de la fonction f sur l'intervalle $[n, n+1]$, puis celle d'un nombre réel x_n appartenant à $[n, n+1]$ tel que $f(x_n) = M_n$.

b) On suppose $n \geqslant 1$. Montrer que :
- $f'(x_n) = 0$ si $n < x_n < n+1$, et comparer alors $f(x_n - 1)$ à $f(x_n)$.
- f est constante sur $[n, n+1]$ si $x_n = n+1$.

En déduire dans tous les cas que $M_{n-1} \geqslant M_n$.

c) On définit de même le minimum m_n de la fonction f sur l'intervalle $[n, n+1]$.
Etablir la monotonie de la suite (m_n) et en déduire la convergence des suites (M_n) et (m_n).

2) On étudie dans cette question l'existence d'une limite éventuelle de f en $+\infty$ et on pose

$$L = 2\int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Calculer la dérivée de l'application $x \mapsto g(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} (t-x)f(t)\,\mathrm{d}t$ et exprimer $g(x)$ à l'aide de L.

b) Justifier l'inégalité suivante pour $x \geqslant n$:

$$0 \leqslant \int_x^{x+1} (t-x)\big(M_n - f(t)\big)\,\mathrm{d}t \leqslant M_n - f(x+1)$$

En l'appliquant avec $x = x_{n+1} - 1$, en déduire que : $0 \leqslant \dfrac{M_n - L}{2} \leqslant M_n - M_{n+1}$.

c) Etablir une inégalité analogue faisant intervenir L, m_n et m_{n+1}, et en déduire enfin que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers $+\infty$.

Partie IV: Recherche des fonctions bornées de $E_1(\phi)$

On désigne maintenant par f une application bornée de $E_1(\phi)$ et on note alors

$$M = \sup\{|f(x)| \,/ x \in \mathbb{R}\}$$

1) On étudie dans cette question la fonction u_0 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u_0(x) = \int_{x-1}^{x} \big(f(t) - f(x)\big)^2\,\mathrm{d}t$$

a) Comparer u_0 et $\phi f^2 - f^2$ (ou $\phi(f^2) - f^2$).

b) Calculer la dérivée de u_0 et en déduire le sens de variation de u_0.

2) On définit alors par récurrence à partir de u_0 une suite de fonctions (u_n) définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_n(x) = \phi u_{n-1}(x) \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n(x) = \int_{x-1}^{x} u_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Calculer la dérivée de u_n et en déduire le sens de variation de u_n.

b) Déterminer le sens de variation de la suite $n \mapsto u_n(x)$ lorsque le nombre réel x est fixé.

c) Etablir pour tout nombre réel x et tout nombre entier naturel n l'inégalité suivante :

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \leqslant M^2$$

d) En déduire que la suite $n \mapsto u_n(x)$ converge vers 0, puis que f est constante sur $\mathbb{R}$.