ESSEC

MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2000

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Mardi 9 Mai 2000 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans l'ensemble du problème, on désigne par n un nombre entier naturel non nul et par $\mathbf{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions-polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On note P_n le sous-ensemble de $\mathbf{R}_n[X]$ formé des fonctions-polynômes unitaires et de degré n, autrement dit des fonctions-polynômes de degré n et dont le coefficient de x^n est égal à 1.
L'objectif du problème est de déterminer des fonctions-polynômes P appartenant à P_n et réalisant le minimum sur P_n de chacune des trois expressions suivantes :

$$N_1(P)=\int_{-1}^{+1}|P(x)|dx \quad ; \quad N_2(P)=\sqrt{\int_{-1}^{+1}P^2(x)dx} \quad ; \quad N_\infty(P)=\sup\{|P(x)|/-1\leq x\leq 1\}.$$

Les trois parties du problème sont consacrées à la résolution des trois problèmes ainsi définis. La partie I est indépendante des deux suivantes.

PARTIE I : Minimisation de $N_2(P)$ pour P décrivant P_n

On associe à tout couple (P, Q) de fonctions-polynômes de $\mathbf{R}_n[x]$ le nombre réel suivant :

$$<P,Q>=\int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

1°) Montrer que l'application $(P, Q) \to <P, Q>$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[x]$.

ESSEC BUSINESS SCHOOL
AVENUE BERNARD HIRSCH - B.P. 105
95021 CERGY PONTOISE CEDEX FRANCE
TEL.: 33 (0)1 34 43 30 00
FAX : 33 (0)1 34 43 31 11
WEB: WWW.ESSEC.FR

ETABLISSEMENT D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PRIVE
RECONNU PAR L'ETAT. MEMBRE DE LA FESIC

2°) On considère la fonction f associant à tout n-uplet $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ de nombres réels l'expression suivante (qui représente le carré de la distance entre les deux fonctions-polynômes $t \to t^n$ et $t \to x_{n-1}t^{n-1} + \dots + x_1 t + x_0$ de $\mathbf{R}_n[x]$) :

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_0^1 (t^n - x_{n-1}t^{n-1} - x_{n-2}t^{n-2} - \dots - x_1 t - x_0)^2 \, dt.$$

a) Citer avec précision le théorème permettant d'affirmer l'existence et l'unicité d'un n-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ réalisant le minimum (désormais noté m_n) de l'expression $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ lorsque $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ décrit $\mathbf{R}^n$, et montrer que ces n nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ vérifient les n relations suivantes :

$$\int_0^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-2}t^{n-2} - \dots - a_1 t - a_0) t^k \, dt = 0 \quad \text{où} \quad 0 \le k < n$$

On explicitera ces n relations en calculant les n intégrales figurant ci-dessus pour $0 \le k < n$.

b) On pose pour tout nombre réel x distinct de $-1, -2, \dots -n, -n-1$:

$$F(x) = \frac{1}{x+n+1} - \frac{a_{n-1}}{x+n} - \frac{a_{n-2}}{x+n-1} - \dots - \frac{a_1}{x+2} - \frac{a_0}{x+1}.$$

Etablir l'existence d'un nombre réel a tel que l'on ait pour x distinct de $-1, -2, \dots -n, -n-1$:

$$(x+n+1)(x+n)(x+n-1) \dots (x+2)(x+1)F(x) = ax(x-1)(x-2) \dots (x-n+1).$$

Déterminer la valeur de a en faisant tendre x vers $-n-1$ dans chacun des deux membres de l'égalité précédente (on exprimera a en fonction de $n!$ et $(2n)!$).

c) Etablir l'égalité suivante :

$$m_n = f(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \int_0^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-2}t^{n-2} - \dots - a_1 t - a_0) t^n \, dt.$$

d) Etablir enfin que $m_n = F(n)$ et en déduire que $m_n = \dfrac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$.

3°) On résout maintenant le problème de la minimisation de $N_2(P)$ lorsque P décrit P_n.

a) Pour toute fonction-polynôme P appartenant à P_n, effectuer le changement de variables défini par $x = 2t-1$ dans l'intégrale figurant dans l'expression de $N_2(P)$ et en déduire que :

$$N_2(P) \ge 2^n \sqrt{2m_n}.$$

b) En déduire le minimum de $N_2(P)$ lorsque P décrit P_n.

PARTIE II : Minimisation de $N_\infty(P)$ pour P décrivant P_n

On considère la suite des fonctions (T_k) définies par $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ puis, pour $k \ge 1$, par la relation de récurrence :

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x).$$

Par ailleurs, on rappelle la formule de trigonométrie suivante : $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.

1°) On étudie dans cette question quelques propriétés des fonctions T_k.

a) Montrer que T_k est une fonction-polynôme de degré k, de coefficient dominant 2^{k-1} ($k \ge 1$).

b) On considère un nombre réel θ. Exprimer en fonction de θ les nombres $T_1(\cos\theta)$, $T_2(\cos\theta)$, $T_3(\cos\theta)$ et montrer que $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$ pour tout nombre entier naturel k.

2°) On résout maintenant le problème de la minimisation de $N_\infty(P)$ lorsque P décrit P_n.

a) On considère, s'il en existe, une fonction-polynôme P appartenant à P_n telle que :

$$N_\infty(P) = \sup\{|P(x)| \ / \ -1 \le x \le 1\} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

- Préciser pour $0 \leq k \leq n$ le signe de $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(\cos(\frac{k\pi}{n})) - P(\cos(\frac{k\pi}{n}))$.
- En déduire que $T_n/2^{n-1} - P$ admet au moins n racines réelles, puis établir une contradiction en examinant le degré de $T_n/2^{n-1} - P$.

b) En déduire le minimum de $N_\infty(P)$ lorsque P décrit P_n.

PARTIE III : Minimisation de $N_1(P)$ pour P décrivant P_n

On considère la suite des fonctions (U_k) définies par $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ et pour $k \geq 1$ par :

$$U_{k+1}(x) = 2xU_k(x) - U_{k-1}(x).$$

1°) On étudie dans cette question quelques propriétés des fonctions U_k.

a) Montrer que U_k est une fonction-polynôme, préciser son degré et son coefficient dominant. Etablir de plus que $U_k(-x) = (-1)^k U_k(x)$.

b) Déterminer les suites (u_k) vérifiant la relation de récurrence : $u_{k+1} - 2\cos\theta\, u_k + u_{k-1} = 0$.
En déduire pour tout nombre réel θ appartenant à $]0, \pi[$ l'expression de $U_k(\cos\theta)$ en fonction de $\sin((k+1)\theta)$ et $\sin\theta$, puis déterminer $U_k(1)$ et $U_k(-1)$ à l'aide d'un passage à la limite.

c) En dérivant la relation $T_{k+1}(\cos\theta) = \cos((k+1)\theta)$, exprimer $(k+1)U_k$ en fonction de la dérivée de T_{k+1}.

2°) Pour tout nombre réel x, on note $\mathrm{sgn}(x)$ la fonction "signe de x", définie par :

$$\mathrm{sgn}(x) = 1 \text{ si } x > 0, \quad \mathrm{sgn}(x) = 0 \text{ si } x = 0, \quad \mathrm{sgn}(x) = -1 \text{ si } x < 0.$$

On considère, s'il en existe, une fonction-polynôme P appartenant à P_n telle que :

$$(*) \quad \int_{-1}^{1} x^k \,\mathrm{sgn}(P(x))\,dx = 0 \quad \text{où} \quad 0 \leq k < n.$$

a) Prouver, pour toute fonction-polynôme Q appartenant à P_n, l'égalité suivante :

$$\int_{-1}^{1} (Q(x) - P(x))\,\mathrm{sgn}(P(x))\,dx = 0.$$

b) En déduire que $N_1(P) \leq N_1(Q)$.

c) Calculer l'intégrale $N_1(U_n)$ à l'aide du changement de variables $x = \cos(\theta/(n+1))$ où θ décrit le segment $[0, (n+1)\pi]$. En admettant que la fonction-polynôme $U_n/2^n$ vérifie l'hypothèse $(*)$, en déduire le minimum de $N_1(P)$ lorsque P décrit P_n.

3°) On démontre pour terminer que la fonction-polynôme $U_n/2^n$ vérifie bien l'hypothèse faite à la question précédente. A cet effet, on introduit les nombres réels suivants :

$$c_j = \cos\frac{j\pi}{n+1} \quad \text{où} \quad 0 \leq j \leq n+1.$$

(On notera que ceux-ci vérifient $-1 = c_{n+1} < c_n < \ldots < c_2 < c_1 < c_0 = 1$).

a) Déterminer la valeur de $U_n(c_j)$ pour $1 \leq j \leq n$ et déterminer le signe de $U_n(x)$ sur chacun des $n+1$ intervalles $]c_{n+1}, c_n[, \ldots,]c_2, c_1[,]c_1, c_0[$.

On considère alors l'intégrale suivante, où k désigne un nombre entier tel que $0 \leq k < n$:

$$I_k = \int_{-1}^{1} x^k \,\mathrm{sgn}(U_n(x))\,dx.$$

b) On suppose $n+k$ impair. Déterminer la valeur de I_k en étudiant la parité de la fonction figurant sous le signe intégral.

c) On suppose $n+k$ pair. Prouver l'égalité suivante :

$$I_k = \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j c_j^{k+1}.$$

En remarquant que :

$$c_j = \frac{1}{2}[\exp(i\frac{j\pi}{n+1}) + \exp(-i\frac{j\pi}{n+1})]$$

prouver que I_k est nul et en déduire que $U_n/2^n$ vérifie bien l'hypothèse de la question 2°.

***