Épreuve de Mathématiques II

Option Scientifique

Le sujet

L'objet du problème est l'étude de la notion de loi stable : on s'intéresse aux suites de variables aléatoires, indépendantes, suivant toutes la même loi qu'une variable X, et dont la somme de n d'entre elles suit encore, à un facteur d'échelle près, la même loi que X.

La première partie établit un résultat technique concernant certaines suites multiplicatives. Les seconde et troisième parties montrent que les lois de Gauss et de Cauchy sont stables. La quatrième partie, constituant une parenthèse dans le problème, illustre l'intérêt de la loi de Cauchy pour la modélisation de phénomènes à décroissance lente. Enfin, dans la dernière partie, on montre que le facteur d'échelle est nécessairement d'un type particulier.

Les résultats obtenus

La moyenne des copies corrigées est voisine de 10 avec un l'écart-type proche de 4. La population a été convenablement triée.

La présence de nombreuses questions nécessitant des calculs a eu, par la juste récompense qu'on leur accorde et par leur incompressible durée de résolution, le double effet de limiter le nombre des notes basses et celui des excellentes notes.

Comme d'habitude il n'était pas nécessaire de traiter tout le problème pour mériter une bonne note.

Commentaires détaillés

La présentation des copies est, en général, satisfaisante. La rédaction, c'est-à-dire la présentation ordonnée des arguments visant à l'obtention d'un résultat clairement énoncé, est elle très déficiente.

Les candidats ont, en général, abordé les quatre premières parties.

Le problème était assez technique, comportant un certain nombre de questions nécessitant de faire soigneusement des calculs. Par exemple, la troisième partie, même si elle était bien découpée, nécessitait la recopie de formules assez longues. Certains candidats ont préféré s'abstenir sur ces questions, se privant de points assez faciles. D'autres, les plus nombreux, s'y sont visiblement épuisés, faute de tenter de voir l'enchaînement des questions.

Passons maintenant à quelques commentaires techniques.

I-A-1) Il fallait, pour convaincre, citer la stricte positivité des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce que beaucoup de candidats oublient.

I-A-2) Assez bien fait. Rappelons tout de même que, sans initialisation, une récurrence ne prouve absolument rien.

I-A-3) Rarement fait correctement. Les candidats sérieux déterminent la valeur possible du réel α_r mais peinent souvent pour montrer que ce choix convient.

I-A-4-a) Très rarement fait correctement (moins de 1% des candidats). Les candidats écrivent à peu-près n'importe quoi, sans même chercher à comprendre la question. Ceux qui ont fait un pas dans la bonne direction ont été fortement valorisés.

I-4-b) Traitée de façon acceptable dans un nombre non négligeable de copies. Les candidats ont, par défaut, considéré que les réels α_r étaient strictement positifs, ce qui est une conséquence des hypothèses faites sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I-4-c) La lecture des copies est, sur cette question, très déprimante. Très souvent « l'argumentation » repose sur les équivalences $Ar_2^{k+1} \sim r_2^{k+1}$ et $r_2^k \sim r_2^{k+1}$, le tout dissimulé sous un fatras de calculs divers. Des élèves de Terminale feraient sans doute mieux sur cette question...

II-1) Il s'agissait d'exprimer α, m et σ en fonction de a, b et c et non le contraire.

II-A-2) Assez bien fait quand les candidats suivaient le texte, beaucoup moins quand ils l'ignoraient.

II-A-3) Il s'agissait de redémontrer un résultat du cours. Là encore, il était préférable de s'inspirer de la question précédente, qui préparait le terrain, plutôt que de rétablir le résultat *ex nihilo*, surtout avec des variables d'espérances quelconques. D'autre part, il était nécessaire de citer l'argument d'indépendance pour justifier l'emploi de la formule de convolution. Bref, sur cette question, les candidats ont pu donner libre cours à leur sens inné du calcul débridé avant, et c'est toujours spectaculaire, qu'un «donc» merveilleux ne siffle, au milieu d'une inextricable mêlée, la fin- toujours heureuse- de la partie.

II-A-4) Plutôt bien fait en général par ceux qui voient que l'on prouve quelque chose. D'autres citent le cours...

II-B-1) On attendait que les candidats citent l'indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$ avant de calculer la variance de leur somme.

II-B-2) Un énoncé exploitable du théorème de la limite centrée figure dans un tiers des copies qui abordent la question. Mais, on le déplore à chaque fois, sa signification, pourtant capitale, échappe totalement aux candidats sans doute plus habitués aux tirages stériles (puérils ?) de boules colorées ou non dans des urnes plus ou moins discernables, qu'à l'interprétation d'un résultat fondamental et «culturel».
Signalons enfin que l'abus de la notation $\hookrightarrow$ a entraîné de fâcheuses confusions avec le symbole $\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$.

III-1) Nombreux sont les candidats qui disent que la fonction f_a est continue sauf en un nombre fini de points...

III-2-a) Une moitié des candidats trouvent une espérance nulle. Signalons que la notation $\underset{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}}{\text{Lim}} \int_A^B f(t)\, dt$ est pour le moins suspecte.

III-2-b) Bien traité dans l'ensemble.

III-3-a) Presque tous les candidats affirment que les nombres complexes $z_1, z_2, \overline{z_1}$ et $\overline{z_2}$ sont quatre racines du polynôme P sans même examiner leur éventuelle égalité deux à deux.

III-4) Ces deux égalités assez faciles à vérifier ont pourtant, bien souvent, arrêté les candidats.

III-5) Le premier calcul est fait sans problème mais le second donne lieu à d'étranges calculs.

III-6) et 7) Il n'y avait plus qu'à se laisser guider ce qu'on fait un certain nombre de candidats.

IV-1) et 2) Ces deux questions sont révélatrices du niveau réel des candidats. Les candidats, en petit nombre, qui ont abordé avec soin ces questions ont été fortement valorisés.
Les autres écrivent n'importe quoi, des intersections de variables, des divisions ou des multiplications d'événements, confondent égalité des variables et égalité en loi, invoquent dans le désordre l'incompatibilité et l'indépendance... Ce constat récurrent et désastreux, concernant des techniques de bases du cours de probabilité, met l'accent sur la faible préparation «théorique» des candidats sur cette partie du programme.
IV-3) Assez bien traité.

IV-4) On a récompensé ceux qui procédaient avec soin.

IV-5) et 6) Ces questions d'analyse ont été rarement traitées mais avec un bon taux de réussite.

La partie V, sans doute par manque de temps, a été rarement abordée. De plus, sauf dans la première question, les candidats paraphrasent le texte, ne fournissant aucune preuve réelle. De fait cette partie, la plus subtile, nécessitait de la rigueur et du soin avec en particulier l'utilisation de l'hypothèse «Pour toute suite de copies...» figurant dans la définition d'une loi stable. C'est ainsi que le lecteur attentif pourra contester l'apparente simplicité de la dernière question...

Recommandations aux futurs candidats

Les candidats doivent se convaincre de la nécessité d'une argumentation précise, utilisant des résultats connus de tous (le «cours») ou antérieurs à la question posée, visant à guider le lecteur-correcteur au cours de l'exposé. Ils doivent aussi s'attacher, au cours de leur réflexion, à découvrir l'enchaînement des questions et, après coup, se forcer à tester la cohérence des résultats qu'ils obtiennent. Qu'ils soient convaincus que la rédaction avec peu de fautes d'une partie limitée du problème sera de plus en plus préférée à une succession, même longue, de réponses à moitié justes.