Mathématiques I
Option Scientifique

1. Le sujet

L'objet du problème était une caractérisation de la loi de Poisson à partir de l'étude d'un couple aléatoire suivant une loi trinomiale et des lois marginales d'un tel couple. Le sujet, de nature probabiliste, faisait appel dans sa dernière partie à des résultats d'analyse assez fins, notamment un lemme de Fubini.

La première partie décrivait, à partir d'un schéma d'urne, l'expérience permettant de calculer la probabilité d'un couple aléatoire (X_n, Y_n) de loi trinomiale, et se prolongeait par une simulation informatique. Dans la seconde partie, on montrait que les lois marginales du couple (X_n, Y_n) étaient des lois binomiales non indépendantes et on calculait la covariance du couple (X_n, Y_n). Enfin, dans la troisième partie, on caractérisait la loi de Poisson à partir d'une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{R}$ et indépendante de tous les couples (X_n, Y_n).

2. Résultats et commentaires

La note moyenne obtenue dans l'ensemble des 2329 candidats de l'option scientifique est de 9, 27 et l'écart-type atteint un niveau élevé de 4, 38. Dans la note finale, le barème accordait 23% des points à la partie I, 18% à la partie II et 59% à la partie III (13% à la sous-partie A, 8% à la sous-partie B et 38% à la sous-partie C).

L'épreuve comportait un grand nombre de questions dont la réponse était donnée ; aussi, fallait-il résoudre correctement au moins les trois quarts du problème pour obtenir la note de 20. Il est utile de rappeler une fois de plus à ce propos que tous les candidats qui dans leurs copies prennent prétexte de la réponse fournie pour tenter par des moyens inappropriés ou hasardeux d'obtenir le bon résultat, sont fortement sanctionnés.

Dans l'ensemble, la présentation des copies est convenable et le cours est mieux maîtrisé que l'an passé. Ainsi :

- la question I.1 est presque toujours bien traitée sauf par quelques candidats qui ont reconnu des lois hypergéométriques au lieu de lois binomiales ;
- la formule $V(U + D) = V(U) + V(D) + 2\mathrm{Cov}(U, D)$ est bien appliquée (question I.4) ;
- la simulation informatique de la question I.5 est traitée correctement lorsqu'elle est abordée (environ deux tiers des copies).

Toutefois, on peut relever dans nombre de copies des erreurs et des imprécisions dont la liste suivante, non exhaustive, rend compte :

- une proportion non négligeable de candidats semble considérer que la notion d'indépendance est subjective et ne se sent pas tenue de l'argumenter (I.1) ;
- dans la question I.3, on demandait de déterminer la loi de la variable aléatoire $U + D$, somme de deux variables aléatoires suivant chacune une loi binomiale, mais non indépendantes. L'argument de stabilité des lois binomiales, fréquemment invoqué, n'est donc pas pertinent ;

- la détermination de la probabilité d'un événement élémentaire (I.6) s'est révélée difficile pour l'immense majorité des candidats dont les multiples tentatives pour arriver à la formule proposée ont été particulièrement éprouvantes pour les correcteurs ;
- de très nombreux candidats semblent ignorer la définition d'une somme double et les règles élémentaires de manipulation de telles sommes ;
- très peu ont été capables d'effectuer correctement un changement d'indice (II.1) ;
- dans la partie III, la justification d'une égalité ensembliste, pourtant très simple, pose de gros problèmes à une majorité de candidats trop pressés d'en « découdre » au plus vite avec les probabilités (A-1). De même, dans la sous-partie C, peu de candidats ont su appliquer correctement le lemme de Fubini et bien plus rares encore furent ceux qui ont su justifier son utilisation ;
- enfin, dans la fin du problème, simple et très guidée, qui consistait à résoudre une équation fonctionnelle, les récurrences un peu fines ont été, en général, particulièrement mises à mal ; de même, la décroissance de la fonction φ, définie comme somme d'une série, a été dans la plupart des copies justifiée en dérivant φ alors qu'aucun argument du programme ne permet d'affirmer que φ est dérivable.