Mathématiques III
Option Economique

1. Le sujet

Un exercice d'algèbre et un problème mêlant l'analyse et les probabilités ont été proposés aux candidats de l'option économique. L'exercice d'algèbre portait sur l'étude de certains endomorphismes en dimension 2 et 4 et faisait appel à des connaissances assez larges d'algèbre linéaire : famille libre, base, théorème de la base incomplète, matrice associée à un endomorphisme, diagonalisabilité d'un endomorphisme. Le problème, de nature probabiliste, portait sur un jeu et nécessitait des connaissances sur les suites et les séries, les intégrales généralisées, les probabilités discrètes et le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire.

2. Les résultats obtenus

Le barème de notation accordait un tiers des points à l'exercice d'algèbre et deux tiers des points au problème. Le poids relativement élevé de l'algèbre linéaire dans cette épreuve a opéré une très nette césure entre les 1415 candidats de l'option économique. La note moyenne est de $8,30$ et, avec un écart-type de $3,77$; cette épreuve a permis un bon classement des candidats. La note maximale de 20 était obtenue par tout candidat ayant résolu correctement au moins les deux tiers de l'épreuve.

3. Commentaires détaillés

Dans l'ensemble, les raisonnements mathématiques sont trop approximatifs voire absents, les théorèmes ne sont pas cités, ou bien avec des hypothèses non explicitées. Beaucoup de candidats semblent ne retenir que des techniques de calcul souvent mal maîtrisées par manque de méthode.

Exercice

A - 1. La grande majorité des candidats ne traite pas correctement la question posée en ne tenant pas compte du quantificateur « il existe ».

A - 2. Cette question est bien résolue par les candidats qui connaissent la définition d'une matrice associée à un endomorphisme dans une base donnée.

B - 1. Cette question a été traitée correctement par un quart des candidats.

B - 2. Il ne faut pas oublier que $\alpha x + \beta f(x) = 0$ n'entraîne pas immédiatement que $f(x) = \lambda x$; il faut aussi traiter le cas où $\beta = 0$.

B - 3. a) Il suffit d'invoquer le théorème de la base incomplète.

B - 3. b) Cette question, assez difficile, n'a pratiquement jamais été traitée correctement. Les candidats ne voient pas que si y appartient à $\mathrm{Vect}(z_1, z_2)$, alors $f(y)$ n'appartient pas obligatoirement à ce sous-espace.

B - 4. Le résultat donné a permis à tous les candidats ayant abordé cette question de la résoudre.

C - 1. Il n'est pas inutile de rappeler que pour montrer que f est un endomorphisme de E, il ne suffit pas de vérifier la linéarité.

C - 2. Les sous-questions sont bien traitées dans la majorité des copies.

C - 3. Les sous-questions a et b sont correctement résolues ; les sous-questions c et d ne sont pas traitées.

Problème

Partie I

1. Les trois sous-questions sont en général bien résolues mais pour certains candidats, la définition de deux suites adjacentes n'est pas maîtrisée.

2. Beaucoup de candidats ignorent la définition de la convergence d'une série.

3. Les copies dans lesquelles on applique les résultats des questions précédentes à cet exemple particulier sont malheureusement peu fréquentes.

4. a) Il est inutile de se lancer dans des raisonnements par récurrence, s'agissant ici d'une suite géométrique.

4. b) Cette question est bien traitée.

4. c) Trop de candidats écrivent que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 t^n dt = \int_0^1 \lim\limits_{n \to +\infty} t^n dt$.

Partie II

1.a) La « décomposition en éléments simples » est toujours bien faite.

1.b) Beaucoup de candidats écrivent des sommes de séries divergentes $(\sum \frac{1}{n}, \sum \frac{1}{n+1})$ pour obtenir la somme de la série (convergente) $\sum \frac{1}{n(n+1)}$.

2. a) L'événement « Pierre gagne une manche quelconque » a rarement été traduit sous la forme d'une union d'événements incompatibles. Certains obtiennent une probabilité qui dépend de n !!

2. b) La formulation de la question (calculer) a manifestement induit une réponse finale fausse. En effet, les très rares candidats (3%) qui ont montré fort justement que $\sum \frac{(-1)^j}{j+1} = 1 - \ln 2$ se sont trompés en concluant qu'ils avaient calculé ainsi l'espérance du gain, la série $\sum \frac{(-1)^j}{j+1}$ n'étant pas absolument convergente. Les correcteurs ont néanmoins accordé des points aux candidats ayant réussi à mener à bien ce calcul.

3. On trouve quelques résultats corrects mais rarement bien justifiés.

4. a) Les connaissances relatives aux théorèmes sur la convergence des intégrales impropres sont trop imprécises, en particulier l'hypothèse de positivité. Rappelons que pour $x \in]0,1]$, $\ln x \leqslant 0$. Certaines majorations deviennent alors évidentes.

4. b) Il n'est nullement besoin de faire un raisonnement par récurrence (suite géométrique).

4. c) Le prolongement par continuité est relativement bien fait. Il ne faut pas oublier le cas où $k = 0$. Le calcul de l'intégrale requiert une intégration par parties sur un intervalle $[a, 1]$ avec $a > 0$, puisque les fonctions en jeu ne sont pas de classe C^1 sur $[0, 1]$, puis de faire tendre a vers 0.

4. d) Dans l'ensemble, cette question n'est pas très bien traitée et donne lieu parfois à des prolongements par continuité assez fantaisistes.

4. e) La valeur de l'intégrale sous forme d'une somme de série est assez correctement établie. En revanche, le calcul de la somme de cette série fait l'objet de calculs curieux, en particulier « $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ en posant $j = 2k + 1$ ».

5. a) Cette question est bien traitée.

5. b) Le calcul de $P(Y = 1)$ n'a pratiquement jamais été abordé.

6. De même que dans la question 2. a), les candidats ne parviennent pas à formaliser l'événement considéré.