



**ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P. - E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON**

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Mercredi 9 Mai 2001, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On dispose de n jetons numérotés de 1 à n . On tire, au hasard et sans remise, les jetons un à un. La suite (a_1, a_2, \dots, a_n) des numéros tirés est aussi appelée permutation de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Étant donné deux entiers k et p vérifiant $1 \leq k \leq p \leq n$, la suite (a_k, \dots, a_p) — se réduisant à (a_k) dans le cas où k est égal à p — est appelée sous-suite de (a_1, a_2, \dots, a_n) et son nombre d'éléments est appelé longueur de cette sous-suite.

On admettra que cette expérience aléatoire peut être modélisée par la donnée de l'univers Ω , ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$, muni de la tribu de ses parties $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme \mathbf{P} , ce qui signifie que, pour toute permutation ω de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a : $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n!}$.

Si X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$, on note $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$, on note $\text{Cov}(X, Y)$ leur covariance.

Préliminaire

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{1, 2, \dots, m\}$ où m est un entier supérieur ou égal à 2.

Montrer l'égalité : $E(X) = \sum_{k=1}^m \mathbf{P}([X \geq k])$.

Partie 1 : Première sous-suite croissante

Étant donné une permutation (a_1, a_2, \dots, a_n) de $\{1, 2, \dots, n\}$, la première sous-suite croissante est définie de la façon suivante : dans le cas $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, la première sous-suite croissante est (a_1, a_2, \dots, a_n) ; dans le cas contraire, k étant le plus petit entier de $\{1, \dots, n-1\}$ vérifiant $a_k > a_{k+1}$, la première sous-suite croissante est (a_1, \dots, a_k) .

Soit L la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ qui, à toute permutation ω , associe la longueur de sa première sous-suite croissante.

Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, comme $2 < 3 < 5$ et $5 > 4$, on a : $L(\omega) = 3$.

1) a) Quelles sont la plus petite et la plus grande des valeurs prises par L ? Que vaut $\mathbf{P}([L = n])$?

b) Montrer que, pour tout entier k de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a : $\mathbf{P}([L \geq k]) = \frac{1}{k!}$. En déduire la loi de L .

2) Donner la valeur de $E(L)$ sous forme d'une somme et déterminer la limite de $E(L)$ quand n tend vers l'infini.

Partie 2 : Deuxième sous-suite croissante

Étant donné une permutation (a_1, a_2, \dots, a_n) de $\{1, 2, \dots, n\}$ et sa première sous-suite croissante (a_1, \dots, a_k) ; si celle-ci se termine par a_n (i.e. si $k = n$), on dit que la deuxième sous-suite croissante n'existe pas; dans le cas contraire, la première sous-suite croissante de (a_{k+1}, \dots, a_n) est appelée deuxième sous-suite croissante de (a_1, a_2, \dots, a_n) .

Soit L' la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ qui, à toute permutation ω , associe 0 s'il n'existe pas de deuxième sous-suite croissante, et la longueur de la deuxième sous-suite croissante, dans le cas contraire.

Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, la deuxième sous-suite croissante est $(4, 9)$ et l'on a : $L'(\omega) = 2$.

- 1) Quelles sont la plus petite et la plus grande des valeurs prises par L' ? Que vaut $\mathbf{P}([L' = 0])$?
- 2) On suppose, dans cette question seulement, que n est égal à 3.
 - a) Montrer que la loi du couple (L, L') est donnée par le tableau suivant :

	L			
L'		1	2	3
0	0	0	0	1/6
1	1/6	1/3	0	0
2	1/3	0	0	0

- b) Donner la loi de L' et calculer son espérance.
 - c) Calculer la covariance de L et de L' . Pouvait-on prévoir le signe de cette covariance?
- 3) On suppose à nouveau que n est un entier quelconque supérieur ou égal à 2.
 - a) Dénombrer les parties de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ distinctes de $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, \dots, n-1\}$.
 - b) En déduire $\mathbf{P}([L + L' = n])$.
 - c) Montrer de même que, pour tout entier k de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a : $\mathbf{P}([L + L' \geq k]) = \frac{2^k - k}{k!}$.
 - d) Donner la valeur de $\mathbf{E}(L + L')$ sous forme d'une somme.
 - e) En déduire $\mathbf{E}(L')$ et sa limite quand n tend vers l'infini.

Partie 3 : Nombre de sous-suites croissantes

Étant donné une permutation (a_1, a_2, \dots, a_n) de $\{1, 2, \dots, n\}$, si sa deuxième sous-suite croissante existe et ne se termine pas par a_n , on définit la troisième sous-suite croissante à l'instar de la deuxième, etc., jusqu'à ce que l'on ait défini une sous-suite croissante se terminant par a_n .

Soit T la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ qui, à toute permutation ω , associe le nombre de ses sous-suites croissantes.

Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, comme les sous-suites croissantes sont $(2, 3, 5), (4, 9), (6, 7, 8)$ et (1) , on a : $T(\omega) = 4$.

- 1)
 - a) Donner la loi de T dans le cas où n vaut 2. Calculer son espérance et sa variance.
 - b) Donner la loi de T dans le cas où n vaut 3. Calculer son espérance et sa variance.
- 2) On suppose désormais l'entier n supérieur ou égal à 4.
 - a) Calculer $\mathbf{P}([T = 1])$ et $\mathbf{P}([T = n])$.
 - b) Comparer les événements $[L + L' = n]$ et $[T \leq 2]$. En déduire la valeur de $\mathbf{P}([T = 2])$.
 - c) Donner la loi de T dans le cas où n vaut 4. Calculer son espérance et sa variance.
- 3) Pour tout entier i de $\{1, 2, \dots, n-1\}$, soit A_i l'événement égal à l'ensemble des permutations (a_1, a_2, \dots, a_n) vérifiant $a_i > a_{i+1}$, et soit X_i la variable aléatoire qui, à toute permutation ω , associe 1 si $\omega \in A_i$ et 0 sinon.
 - a) Montrer que X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Donner son espérance et sa variance.
 - b) Donner une expression de T en fonction de X_i . En déduire l'égalité : $\mathbf{E}(T) = \frac{n+1}{2}$.
 - c) Montrer que l'on a : $\forall i \in \{1, \dots, n-2\}, \mathbf{P}(A_i \cap A_{i+1}) = \frac{1}{6}$. En déduire la valeur de $\text{Cov}(X_i, X_{i+1})$.
 - d) Montrer que, pour tout couple (i, j) d'entiers vérifiant $1 \leq i < i+2 \leq j \leq n-1$, les événements A_i et A_j sont indépendants.
En déduire l'égalité : $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$.

e) Établir enfin l'égalité : $V(T) = \frac{n+1}{12}$.

4) On suppose maintenant que n est égal à 5. On considère 1000 variables aléatoires T_1, \dots, T_{1000} , mutuellement indépendantes, de même loi que la variable T et on note S la variable aléatoire égale à $\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} T_i$.

On note ϕ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et on donne la valeur approchée suivante : $\phi(\sqrt{5}) \simeq 0,987$.

Calculer une valeur approchée de la probabilité $P([2,95 < S < 3,05])$.

Partie 4 : Simulation informatique

Dans le langage informatique PASCAL, la fonction **random** renvoie, pour un argument m de type **integer** vérifiant $m \geq 1$, un nombre entier aléatoire compris entre 0 et $m - 1$ (cette fonction est initialisée au début du corps principal du programme par la procédure **randomize**).

On rappelle que, dans l'exécution d'une boucle **for i :=n downto 2**, i prend successivement les valeurs $n, n-1, \dots, 2$.

Dans un programme écrit en PASCAL, figurent la déclaration **type tableau = array [1..5] of integer** ; et la procédure :

```

procedure aleatoire(var A :tableau);
var aux,i,alea : integer;
begin
  for i :=1 to 5 do A[i] :=i ;
  for i :=5 downto 2 do begin
    alea := random(i)+1 ;
    aux :=A[alea] ;
    A[alea] :=A[i] ;
    A[i] :=aux ;
  end
end ;

```

- 1) a) On suppose que les valeurs successives de **alea** sont 4, 2, 3 et 2. Donner les valeurs de **A[1]**, **A[2]**, **A[3]**, **A[4]** et **A[5]** à la fin de l'exécution de la procédure.
 - b) Quelles valeurs successives doit prendre **alea** pour obtenir, à la fin de l'exécution de la procédure le tableau : **A[1]=3**, **A[2]=5**, **A[3]=2**, **A[4]=4**, **A[5]=1** ?
 - c) Expliquer pourquoi la procédure ci-dessus permet de simuler l'expérience aléatoire définie au début du problème.
- 2) Écrire une fonction d'en-tête **function T(A :tableau) :integer** ; qui renvoie le nombre de sous-suites croissantes du tableau **A** correspondant à une permutation de $\{1, \dots, 5\}$.
- 3) On suppose que le programme contient les déclarations **var A :tableau ; var k :integer ; var S :real** ; et que le corps principal du programme est le suivant :

```

begin
  randomize ;
  S :=0 ;
  for k :=1 to 1000 do begin
    aleatoire(A) ;
    S :=S+T(A) ;
  end ;
  S :=S/1000 ;
  writeln(S) ;
end.

```

Après exécution du programme la valeur affichée de **S** est 2,98. Ce résultat est-il étonnant ?