MATHÉMATIQUES I

Option Scientifique

École conceptrice : EMLYON

Le sujet est constitué d'un problème comportant cinq parties presque indépendantes entre elles.
La Partie I, portant sur les probabilités et sur l'algorithmique, étudie une somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent la loi exponentielle de paramètre 1, et des simulations en Pascal.
La Partie II amène des propriétés élémentaires des polynômes de Laguerre, du point de vue de l'analyse.
La Partie III, mélangeant analyse, algèbre bilinéaire et algèbre linéaire, fait apparaître les polynômes de Laguerre comme vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique.
La Partie IV étudie la nature d'une série construite à partir d'une fonction introduite dans la Partie II.
La Partie V étudie un extremum local d'une fonction de deux variables réelles reliée à une fonction de la Partie II.

Partie I

1. Le cours est souvent bien cité, mais avec quelquefois un paramètre λ, à remplacer ici par 1.

2.a. Un rappel de l'indépendance des variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ est superflu pour le calcul de l'espérance de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

Des candidat(e)s confondent les variables aléatoires $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et nX_1, et donnent alors le résultat faux $\mathrm{V}(S_n) = n^2$. Des variables aléatoires qui suivent la même loi ne sont pas nécessairement égales.
Pour le calcul de $\mathrm{V}(S_n)$, il y a trop souvent oubli de l'indépendance des variables aléatoires $X_1, ..., X_n$.

2.b. Les correcteurs ont quelquefois rencontré la notation incorrecte $\Gamma(n, 1)$ au lieu de la notation correcte ici $\Gamma(1, n)$.
Des candidat(e)s citent bien le cours pour amener la loi Γ, mais oublient de répondre à la question, qui demande une densité de S_n.
Les erreurs sur l'expression d'une densité de S_n sont assez fréquentes

3. Les ensembles de départ et d'arrivée de U sont trop souvent omis.
Des candidat(e)s oublient de définir la fonction de répartition de U sur $]-\infty\,;0[$.
Quelques candidat(e)s obtiennent une loi exponentielle de paramètre négatif et ne s'en étonnent pas.

4. Cette question d'algorithmique a été traitée dans un nombre significatif de copies, et les programmes proposés sont en général corrects.

Quelques candidat(e)s ne comprennent pas ce que signifie simuler une variable aléatoire et se contentent de programmer une densité de S_n.

5. Cette deuxième question d'algorithmique a été moins souvent et moins bien traitée que la précédente.

Partie II

6. Dans certaines copies, les réponses pour L_0, L_1, L_2 ne sont même pas des polynômes et contiennent e^{-x}, ou même dépendent d'un entier n.

D'autre part, des candidat(e)s laissent ici des résultats incohérents avec les résultats fournis par l'énoncé dans des questions suivantes.

7. Quelques candidat(e)s rédigent ici une récurrence et perdent beaucoup de temps, au lieu d'appliquer la formule de Leibniz.

Les correcteurs ont vu quelques rédactions visant délibérément à les tromper sur les compétences réelles du (de la) candidat(e) pour cette question.

8. Des copies contiennent ici une fausse récurrence, c'est-à-dire un raisonnement annoncé par récurrence mais qui, de fait, n'utilise pas l'hypothèse de récurrence.

9. Il y a quelquefois un manque de rigueur dans la notation des dérivées.

10. Beaucoup de copies s'enlisent dans des calculs qui n'aboutissent pas, ou bien affirment péremptoirement des résultats non établis.

11. Question facile et résolue dans presque toutes les copies.

12. Question peu abordée et souvent alors mal traitée, avec quelquefois des tentatives malhonnêtes.

13. Question assez souvent abordée, et la résolution est alors correcte.

Partie III

14. Il y a encore trop d'erreurs dans les copies pour l'étude de la convergence d'une intégrale impropre.

Des candidat(e)s oublient la continuité de la fonction, d'autres oublient, dans certaines rédactions, l'étude de l'absolue convergence de l'intégrale.

Quelques candidat(e)s croient à tort que, puisque $A(x)\,\mathrm{e}^{-x} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} A(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge.

Lors de l'application d'un théorème de majoration ou d'un théorème d'équivalence, il y a trop souvent oubli de la positivité de la fonction.

Des copies affirment que l'application A est bornée sur $[0\,;+\infty[$, ou que $|A(x)\,\mathrm{e}^{-x}| \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}$, ou encore que $A(x)\,\mathrm{e}^{-x} \underset{x \longrightarrow +\infty}{=} o(\mathrm{e}^{-x})$, toutes choses fausses en général.

Des candidat(e)s comparent des intégrales avant de montrer que celles-ci convergent, ce qui est incorrect.

Trop peu de candidat(e)s pensent à faire intervenir la fonction Γ d'Euler.

15. Le vocabulaire n'est pas toujours bien connu, et il y a quelquefois confusion entre bilinéarité et linéarité.

Plus grave, quelques candidat(e)s veulent établir $\forall\,(P,Q) \in E^2, \;\; < P\,,\, Q > \geqslant 0,$

au lieu de montrer : $\forall\, P \in E, \;\; < P\,,\, P > \geqslant 0.$

Il y a souvent oubli de la continuité et/ou oubli d'une propriété des polynômes pour montrer le caractère défini.

16. Des candidat(e)s, en nombre non négligeable, confondent E et E_N et veulent ici, à tort, argumenter sur des degrés.

Les notations T, $T(P)$, $T(P)(x)$ sont souvent mal assimilées et on rencontre dans des copies la notation $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Enfin, certain(e)s candidat(e)s croient que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est polynomiale.

17. Question facile, résolue dans la quasi-totalité des copies.

18. Rappelons que l'on ne doit pas pratiquer une intégration par parties directement sur des intégrales impropres, mais sur un segment puis passer à une limite.

La rédaction est ici souvent médiocre.

19. Trop de candidat(e)s refont ici une intégration par parties inutile et perdent du temps.

20. Question facile demandant de récupérer le résultat de la question 13.

Il y a quelquefois oubli du signe $-$ dans le résultat.

Des copies confondent $T(L_n)$ et $T(L_n)(x)$ et ne répondent pas nettement à la question posée.

21. Quelques copies faibles contiennent ici de grossières erreurs relatives à la bilinéarité du produit scalaire.

Il y a souvent division par un indice i ou j et oubli de l'examen des cas $i = 0$, $j = 0$.

Il ne suffit pas de montrer que, pour tout i entre 0 et $N - 1$, L_i est orthogonal à L_{i+1}, pour établir que la famille $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant N}$ est orthogonale.

22. Question souvent abordée, et en général bien résolue. Cependant, dans certaines copies, on croit, à tort, que E_N est stable par multiplication.

23. On oublie souvent de rappeler que $T_0, ..., T_N$ sont dans E_N.

Il y a souvent oubli de la condition de non-nullité des vecteurs pour affirmer qu'une famille orthogonale est libre.

24. Beaucoup de candidat(e)s confondent ici n et N.

Les correcteurs ont rencontré quelques matrices aberrantes, ayant des L_i pour coefficients.

25. Il y a souvent confusion entre l'endomorphisme T_N et la matrice de T_N dans la base $(L_0, ..., L_N)$.
La plupart des candidat(e)s ne voient pas que T_N est diagonalisable tout simplement parce que la matrice de T_N dans la base $(L_0, ..., L_N)$ est diagonale, et donnent des explications contournées. Le fait qu'un endomorphisme représenté par une matrice diagonale est diagonalisable ne paraît pas évident aux candidat(e)s.

Partie IV

26. Une importante minorité des candidat(e)s ne pense pas à étudier les variations de g_n.

27. Dans plusieurs copies, on trouve l'erreur $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1$ au lieu du résultat correct $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$. Il y a aussi quelques erreurs dans le rappel du développement limité de $x \longmapsto \ln(1+x)$ lorsque x tend vers 0.
Dans la majorité des copies qui ont abordé cette question, il y a souvent une erreur sur l'ordre auquel il faut développer $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

28. On trouve encore l'erreur grossière : la série $\sum_n a_n$ converge parce que son terme général a_n tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini.
Il y a quelquefois oubli du rappel de la positivité lors de l'utilisation d'un théorème d'équivalence.

29. Des candidat(e)s commettent l'erreur $n! = n(n-1)\cdots 1 \underset{n\infty}{\sim} n^n$, en croyant sans doute que $n(n-1)\cdots 1$ est un polynôme en n.
Le lien avec la question 28 n'est pas toujours perçu.

30. Question souvent correctement traitée, en admettant le résultat de la question 21.

Partie V

31. La justification de la classe C^2 pour F est souvent confuse.
Le calcul des dérivées partielles premières de F est souvent lourdement rédigé, en remplaçant f par son expression pour dériver, puis en faisant apparaître f' dans le résultat.

32. Question bien résolue par les candidat(e)s qui l'ont abordée.

33. La résolution est souvent incomplète ou fausse, et manque presque toujours de rigueur.

34. Question peu abordée, les candidat(e)s ne pensant pas à étudier les variations de la fonction $x \in]0\,;+\infty[\longmapsto f'(x) - f'(2x)$.

35. Question facile, souvent abordée et correctement traitée.

36. Question peu abordée, probablement par manque de temps. Les calculs sont alors en général lourdement menés ou inexacts.

Les correcteurs ont estimé qu'il s'agit d'un très bon sujet, intéressant et varié, conforme à la lettre et à l'esprit du programme, de difficulté graduée, couvrant une large partie des connaissances exigibles, y compris l'algorithmique, de longueur satisfaisante et adapté au niveau des candidat(e)s.

Le sujet évalue la connaissance du programme, mais aussi la capacité à résoudre des problèmes et à synthétiser.

Une bonne gradation de la difficulté a permis aux candidat(e)s de mettre en valeur leur travail de préparation des deux années dans des questions de facture classique, et a aussi permis, par des questions plus fines, aux meilleur(e)s de se dégager. Les capacités à relier différentes questions, à argumenter et à synthétiser font partie des critères d'évaluation des copies.

La présentation des copies est satisfaisante, mais l'argumentation est souvent trop vague et approximative, et la rédaction manque de clarté, de précision, de concision. Le tri entre les arguments utiles à la démonstration et ceux exacts mais inappropriés à celle-ci n'est pas toujours pertinent.

Des règles élémentaires de rédaction et de présentation ne sont pas toujours respectées. On doit éviter les abréviations abusives. Rappelons qu'il est impératif de numéroter les questions, de mettre en évidence les résultats, par exemple en les encadrant, et de séparer nettement les questions. De plus, tous les calculs doivent figurer sur la copie.

L'éventail complet des notes a été utilisé, et le sujet a joué pleinement son rôle de sélection.

Au bilan, les candidat(e)s n'ont pas été surpris(es) et le sérieux du travail a été récompensé.