



Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 2000

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Mardi 2 mai 2000 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On considère la matrice carrée réelle d'ordre trois :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 de matrice J dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On considère, pour tout nombre réel a , la matrice carrée réelle d'ordre trois :

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. a. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .
- b. Montrer que J est diagonalisable. Déterminer une matrice réelle diagonale D d'ordre trois et une matrice réelle inversible P d'ordre trois telles que $J = PDP^{-1}$.
- c. En déduire que, pour tout nombre réel a , il existe une matrice réelle diagonale D_a d'ordre trois, que l'on calculera, telle que $M_a = PD_aP^{-1}$.
- d. Quel est l'ensemble des nombres réels a tels que M_a soit inversible ?

2. On se propose, dans cette question, de déterminer l'ensemble des nombres réels a tels qu'il existe une matrice X carrée réelle d'ordre trois vérifiant $X^2 = M_a$.
- a. Soient a un nombre réel et X une matrice carrée réelle d'ordre trois tels que $X^2 = M_a$.
- α) Montrer que X commute avec M_a , puis que X commute avec J .
- β) On note h l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice X dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
Déduire de la question précédente que tout vecteur propre de f est vecteur propre de h .
- γ) Etablir qu'il existe une matrice réelle diagonale Δ d'ordre trois telle que $X = P\Delta P^{-1}$ et montrer : $\Delta^2 = D_a$.
- δ) En déduire : $a \geq 2$.
- b. Réciproquement, montrer que, pour tout nombre réel a supérieur ou égal à 2, il existe une matrice carrée réelle X d'ordre trois telle que $X^2 = M_a$.
- c. Conclure.

Exercice 2

On considère la fonction $f :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $] - 1; + \infty [$, par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[. \end{cases}$$

1. a. Montrer que f est continue sur $] - 1; + \infty [$.
- b. Montrer que f est de classe C^1 sur $] - 1; 0[$ et sur $]0; + \infty [$.
Pour tout réel x de $] - 1; 0[\cup]0; + \infty [$, calculer $f'(x)$.
- c. Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.
- d. En déduire que f est de classe C^1 sur $] - 1; + \infty [$.
2. Montrer : $\forall x \in] - 1; + \infty [$, $\frac{x}{x+1} - \ln(1+x) \leq 0$.
En déduire les variations de f . On précisera les limites de f en -1 et $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $] - \frac{1}{2}; + \infty [$, l'intégrale $\int_x^{2x} f(t) dt$ existe.
4. On considère la fonction $F :] - \frac{1}{2}; + \infty [\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $] - \frac{1}{2}; + \infty [$, par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt.$$

- a. Montrer que F est dérivable sur $] - \frac{1}{2}; + \infty [$ et que F est croissante.
- b. Montrer : $\forall x \in]0; + \infty [$, $F(x) \geq xf(2x)$.
- c. En déduire que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

- d. Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t) dt$ est convergente.

En déduire que la fonction F admet une limite finie en $-\frac{1}{2}$. On ne cherchera pas à calculer cette limite.

Exercice 3

Soit a un entier strictement positif.

On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants :

I. Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignées sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $E(X)$ son espérance.

1. Montrer : $\forall k \in \{1, \dots, 2n - 1\}, P(X = k) = \frac{2n - k}{n(2n - 1)}$.

2. Montrer : $E(X) = \frac{2n + 1}{3}$.

On rappelle que pour tout entier naturel $p \geq 1$, on a :
$$\sum_{k=1}^p k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$
 .

3. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge.

On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ième}}$ carte découverte, G_1 est égale à $a - k$.

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G_1 .

II. Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignées sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes.

Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge.

On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ième}}$ carte découverte ($k \leq n$), G_2 est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer $P(G_2 = a - k)$.

2. Vérifier : $P(G_2 = -n) = \frac{n - 1}{2(2n - 1)}$.

3. Montrer : $E(G_2) = \frac{3(3n - 1)a - (7n^2 - 1)}{6(2n - 1)}$.

III. Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$).

Déterminer, selon les valeurs de a , le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.