



# BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CODE ÉPREUVE :

280

HEC\_M1\_S

Concepteur : H.E.C.

OPTION SCIENTIFIQUE

## MATHÉMATIQUES I

Mercredi 30 avril 2008, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème,  $n$  et  $p$  désignent deux entiers vérifiant  $1 \leq p \leq n$ . On note  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes, à coefficients réels. La transposée d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  est notée  ${}^tA$ . Lorsqu'une matrice  $A$  est inversible, on note  $A^{-1}$  son inverse.

**Dans tout le problème**, on identifie les deux espaces vectoriels  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  (respectivement  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ ) et  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{R}^p$ ), c'est-à-dire qu'on identifie un vecteur (point) de  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{R}^p$ ) avec le vecteur-colonne de ses coordonnées dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{R}^p$ ).

On munit  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{R}^p$ ) de sa structure euclidienne canonique, et pour tous vecteurs  $u$  et  $v$  de  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{R}^p$ ), on note  $\langle u, v \rangle = {}^t uv$  leur produit scalaire, et  $\|u\|$  la norme de  $u$  associée.

Pour tout  $i$  de  $[[1, n]]$ , on note  $f_i$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^p$  à valeurs réelles, et de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^p$ . Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^p$ , à valeurs réelles, par :  $F(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f_i(x_1, x_2, \dots, x_p)]^2$ .

Autrement dit, si  $X = (x_1, \dots, x_p)$  est un point de  $\mathbb{R}^p$ , on a :  $F(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_i^2(X) = \frac{1}{2} \|f(X)\|^2$ , en notant  $f(X)$  le vecteur  $(f_1(X), \dots, f_n(X))$ .

Le problème a pour objet l'étude de quelques aspects mathématiques liés à la recherche du minimum de la fonction  $F$ .

### Partie I. Gradient et hessienne

Pour tout point  $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  de  $\mathbb{R}^p$ , on rappelle que :

- le gradient de  $F$  au point  $X$ , noté  $\nabla F(X)$ , est le vecteur de  $\mathbb{R}^p$  suivant :

$$\nabla F(X) = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}(X), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_p}(X) \right)$$

- la *matrice hessienne* de  $F$  au point  $X$ , notée  $\nabla^2 F(X)$ , est la matrice symétrique de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  suivante :

$$\nabla^2 F(X) = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j}(X) \right)_{1 \leq k, j \leq p}$$

Pour tout point  $X = (x_1, \dots, x_p)$  de  $\mathbb{R}^p$ , on note  $J(X)$  la matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  définie par :

$$J(X) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

dans laquelle  $i$  désigne l'indice de ligne et  $j$  l'indice de colonne. On pose :  $G(X) = {}^t J(X) J(X)$ .

Si  $X$  est un point de  $\mathbb{R}^p$  vérifiant  $\nabla F(X) \neq 0$ , on dit qu'un vecteur  $h$  de  $\mathbb{R}^p$  est une *direction de décroissance* de  $F$  en  $X$ , si on a :  $\langle \nabla F(X), h \rangle < 0$ .

Dans les trois exemples suivants, on suppose que  $p$  est égal à 2.

### 1. Un premier exemple.

On considère les deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  définies sur  $\mathbb{R}^2$  par :  $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 + 1$ , et  $f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2 + 1$ .

- Justifier que  $F$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Calculer, en tout point  $(x_1, x_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ , le gradient  $\nabla F(x_1, x_2)$ .
- Montrer que le système d'équations qui permet de déterminer les éventuels points critiques de  $F$ , peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 2x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_1 + x_2^2 + 1 = 0 \\ (x_1 - x_2)(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 + 3) = 0 \end{cases}$$

- Établir, pour tout  $(x_1, x_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ , l'inégalité :  $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 + 3 > 0$ . En déduire que l'unique point critique de  $F$  est  $(-1/2, -1/2)$ .
- Déterminer, en tout point  $(x_1, x_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ , la matrice hessienne  $\nabla^2 F(x_1, x_2)$ . En déduire que  $F$  admet un minimum local en  $(-1/2, -1/2)$ .
- On note pour tout point  $X$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\nabla^2 f_1(X)$  et  $\nabla^2 f_2(X)$  respectivement, les matrices hessiennes de  $f_1$  et  $f_2$  au point  $X$ . Préciser la matrice  $J(X)$ . Exprimer  ${}^t J(X) f(X)$  et  $G(X) + \sum_{i=1}^2 f_i(X) \nabla^2 f_i(X)$  en fonction de  $\nabla F(X)$  et  $\nabla^2 F(X)$  respectivement.

### 2. Un deuxième exemple.

Soit  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n)$  et  $c = (c_1, \dots, c_n)$  trois vecteurs non nuls donnés de  $\mathbb{R}^n$ , tels que la famille  $(a, b)$  soit libre.

Pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , la fonction  $f_i$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :  $f_i(x_1, x_2) = a_i x_1 + b_i x_2 - c_i$ .

- Exprimer, pour tout point  $(x_1, x_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ , le gradient  $\nabla F(x_1, x_2)$  à l'aide de  $x_1, x_2, \|a\|, \|b\|, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle$  et  $\langle b, c \rangle$ .
- Justifier l'inégalité :  $\|a\|^2 \times \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2 > 0$ . En déduire que la fonction  $F$  possède un unique point critique  $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$ .

Exprimer  $\widehat{x}_1$  et  $\widehat{x}_2$  en fonction de  $\|a\|, \|b\|, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle$  et  $\langle b, c \rangle$ .

- Calculer, en tout point  $(x_1, x_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ , la matrice hessienne  $\nabla^2 F(x_1, x_2)$  ; en déduire que  $F$  admet un minimum local en  $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$ .
- En utilisant la structure euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ , montrer que  $F$  admet un minimum global en  $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$ .

### 3. Un troisième exemple.

On suppose que  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sont  $n$  réels donnés non tous égaux. On note  $\bar{c}$  et  $s^2$  respectivement, la moyenne arithmétique et la variance de la série statistique  $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

Pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , la fonction  $f_i$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :  $f_i(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - c_i$ .

- Déterminer les points critiques de  $F$ .

b) Soit  $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$  un point critique de  $F$ . Exprimer  $F(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$  en fonction de  $s^2$ . Montrer, pour tout  $(x_1, x_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ , l'égalité :  $F(x_1, x_2) - F(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) = \frac{n}{2}(x_1 + x_2 - \bar{c})^2$ .

c) En déduire la nature des points critiques de  $F$ . Ce résultat était-il prévisible ?

4. Retour au cas général.

Soit  $X = (x_1, \dots, x_p)$  un point de  $\mathbb{R}^p$ .

a) Exprimer  $\nabla F(X)$  en fonction de  ${}^tJ(X)$  et de  $f(X)$ .

b) Pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\nabla^2 f_i(X)$  la matrice hessienne de  $f_i$  au point  $X$ .

Établir la formule :  $\nabla^2 F(X) = G(X) + \sum_{i=1}^n f_i(X) \nabla^2 f_i(X)$ .

## Partie II. Une approximation de $F$

Dans cette partie, on conserve les définitions et les notations de la partie I, et on suppose que  $X$  est un vecteur fixé de  $\mathbb{R}^p$  vérifiant :  $\nabla F(X) \neq 0$ .

Pour tout vecteur  $h = (h_1, h_2, \dots, h_p)$  de  $\mathbb{R}^p$ , on pose :  $\ell(h) = f(X) + J(X)h$  et  $L(h) = \frac{1}{2} \|\ell(h)\|^2$ .

1. Établir, pour tout  $h$  de  $\mathbb{R}^p$ , l'égalité :  $L(h) = F(X) + {}^t h \nabla F(X) + \frac{1}{2} {}^t h G(X) h$ .

2. Soit  $P$  une matrice symétrique de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

a) Justifier que  $P$  est diagonalisable.

b) On note  $\theta_1, \dots, \theta_p$  les valeurs propres de  $P$ , et on pose :  $\theta = \max_{1 \leq j \leq p} |\theta_j|$ . Montrer, pour tout vecteur  $h$  de  $\mathbb{R}^p$ , l'inégalité suivante :  $|{}^t h P h| \leq \theta \|h\|^2$ .

3. a) Écrire un développement limité à l'ordre 2 de la fonction  $F$  au point  $X$ .

b) En déduire, à l'aide de la question 2.b, que l'on a :  $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{F(X+h) - L(h)}{\|h\|} = 0$ .

Pour  $X$  fixé de  $\mathbb{R}^p$ , on dit que  $L(h)$  est une approximation à l'ordre 2 de  $F(X+h)$  lorsque  $\|h\|$  tend vers 0.

4. On note :  $G(X) = (g_{i,j}(X))_{1 \leq i,j \leq p}$ . Soit  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}^p$  par :  $\varphi_1(h) = {}^t h \nabla F(X)$  et  $\varphi_2(h) = {}^t h G(X) h$ .

a) Montrer que pour tout  $j$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , on a :  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial h_j}(h) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(X)$  et  $\frac{\partial \varphi_2}{\partial h_j}(h) = 2 \sum_{i=1}^p g_{i,j}(X) h_i$ .

b) En déduire que le gradient  $\nabla L(h)$  de  $L$  en  $h$ , est donné par :  $\nabla L(h) = \nabla F(X) + G(X)h$ .

c) Soit  $\nabla^2 L(h)$  la matrice hessienne de  $L$  en  $h$ . Établir la formule :  $\nabla^2 L(h) = G(X)$ .

5. Soit  $J$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

a) Montrer que la matrice  ${}^t J J$  est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

b) Montrer que lorsque la matrice  ${}^t J J$  est inversible, le rang de la matrice  $J$  est égal à  $p$ .

6. Montrer que si la fonction  $L$  admet des points critiques  $\widehat{h}$ , alors ceux-ci vérifient l'inéquation :  $\langle \widehat{h}, \nabla F(X) \rangle \leq 0$ .

7. On suppose que la matrice  $G(X)$  est inversible.

a) Montrer que  $L$  admet un unique point critique  $\widehat{h}$  donné par :  $\widehat{h} = -(G(X))^{-1} \times {}^t J(X) f(X)$ .

b) Établir que  $\widehat{h}$  est une direction de décroissance de  $F$  en  $X$ . En déduire que  $L$  admet un minimum local en  $\widehat{h}$ .

## Partie III. Une décomposition d'une matrice rectangulaire

Afin de réduire les inconvénients liés à l'inversion de la matrice  $G(X)$ , on remplace celle-ci par la matrice  $G(X) + \mu I$ , où  $\mu$  désigne un paramètre réel strictement positif, et  $I$  la matrice identité d'ordre  $p$ . Certains résultats d'algèbre linéaire permettent alors de substituer à l'inversion d'une matrice, le calcul plus simple d'une somme de matrices.

Soit  $J$  une matrice non nulle de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

1. Montrer qu'il existe une matrice  $V$  orthogonale de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ , un entier  $q$  tel que  $1 \leq q \leq p$ , et des réels  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  tels que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_q > 0$ , qui vérifient l'égalité :  ${}^tV^tJJV = D$ , où  $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$  est définie par :  $d_{i,i} = \lambda_i$  si  $1 \leq i \leq q$ , et  $d_{i,j} = 0$  sinon. Si  $q < p$ , on pose :  $\lambda_{q+1} = \dots = \lambda_p = 0$ .

Pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , on note  $V_i$  la  $i$ -ième colonne de  $V$ .

2. a) Montrer que le rang de  ${}^tJJ$  est égal à  $q$ .

b) Montrer que, pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, q \rrbracket$ ,  $JV_i$  est un vecteur propre de la matrice  $J^tJ$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ . En déduire que les matrices  ${}^tJJ$  et  $J^tJ$  ont les mêmes valeurs propres non nulles.

c) Soit  $(Y_1, \dots, Y_r)$  une base du sous-espace propre de  ${}^tJJ$  associée à une valeur propre  $\lambda$  non nulle. Montrer que la famille  $(JY_1, \dots, JY_r)$  est une famille libre de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

d) En déduire que les sous-espaces propres de  ${}^tJJ$  et de  $J^tJ$  associés à la même valeur propre non nulle sont de même dimension, et que le rang de  $J^tJ$  est égal à  $q$ .

3. On pose, pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, q \rrbracket$  :  $U_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}JV_i$ .

a) Montrer que la famille  $(U_1, \dots, U_q)$  est une famille orthonormée de vecteurs propres de  $J^tJ$ .

b) En déduire qu'il existe une base orthonormée  $(U_1, \dots, U_q, U_{q+1}, \dots, U_n)$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , formée de vecteurs propres de  $J^tJ$ .

4. On note  $U$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , la  $i$ -ième colonne de  $U$  est la matrice-colonne  $U_i$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Soit  $S = (s_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  la matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  définie par :  $s_{i,i} = \sqrt{\lambda_i}$  si  $1 \leq i \leq p$  et  $s_{i,j} = 0$  sinon.

Établir l'égalité matricielle suivante :  $S = {}^tUJV$ . En déduire l'égalité :  $J = US^tV$ .

5. a) Montrer que la matrice  $({}^tJJ + \mu I)$  est inversible.

b) On note  $R = (r_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$  la matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  définie par :  $r_{i,i} = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\lambda_i + \mu}$  si  $1 \leq i \leq p$  et  $r_{i,j} = 0$  sinon.

Établir la formule suivante :  $({}^tJJ + \mu I)^{-1} \times {}^tJ = VR^tU$ .

c) En déduire l'égalité :  $({}^tJJ + \mu I)^{-1} \times {}^tJ = \sum_{i=1}^q \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\lambda_i + \mu} V_i {}^tU_i$

6. Soit  $X$  un vecteur **fixé** de  $\mathbb{R}^p$  vérifiant :  $\nabla F(X) \neq 0$ .

Pour tout vecteur  $h$  de  $\mathbb{R}^p$ , on pose :  $M(h) = L(h) + \frac{\mu}{2} \|h\|^2$ .

a) Montrer que :  $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{F(X+h) - M(h)}{\|h\|} = 0$ .

b) Calculer, pour tout  $h$  de  $\mathbb{R}^p$ , le gradient  $\nabla M(h)$  et la matrice hessienne  $\nabla^2 M(h)$  de  $M$  en  $h$ .

c) En appliquant les résultats des questions précédentes à la matrice  $J(X)$ , montrer que  $M$  admet un unique point critique  $h^*$ . Donner une expression de  $h^*$  qui utilise les résultats de la question 5.c.

d) Montrer que  $M$  admet un minimum local en  $h^*$ .

À partir de ce minimum local  $h^*$  de  $M$  (ou du minimum local  $\hat{h}$  de  $L$ ), on pourrait utiliser une méthode algorithmique permettant, sous certaines conditions, d'approcher avec une précision donnée un minimum local de la fonction  $F$