

## MATHEMATIQUES I 2007(épreuve n° 280)

Epreuve conçue par H E C

Voie Scientifique

	NBRE CANDIDATS	MOYENNES	ECARTS-TYPE
<b>RESULTATS GLOBAUX</b>	2 446	10,06	4,91

<b>VOIES PREPARATOIRES</b>			
Scientifique	2 446	10,06	4,91

<b>ECOLES UTILISATRICES</b>			
HEC	2 007	10,85	4,84
ESCP-EAP	2 374	10,17	4,91
ENSAE	165	12,34	5,10

### LE SUJET

Cette année, le sujet portait sur l'inégalité de Le Cam par des méthodes essentiellement algébriques.

Dans le préliminaire et la partie I.A, il s'agissait d'étudier les propriétés d'une norme matricielle dont les propriétés permettaient de prouver l'inégalité de Le Cam. Le libellé des questions induisait une rédaction précise et argumentée. La première question un peu délicate mais dont les réponses étaient données, concernait la recherche d'un vecteur  $X$  réalisant l'égalité  $\|AX\| = \|A\| \times \|X\|$ . On définissait ensuite les suites et les séries matricielles dont on demandait de trouver quelques propriétés, et notamment de démontrer que la suite  $(I+A/n)^n$  convergait vers  $\exp(A)$ .

La partie I.B s'intéressait à la restriction de l'exponentielle à l'espace vectoriel des matrices symétriques.

La partie II était technique et préparait l'application probabiliste de la partie III. On commençait par étudier les puissances d'une matrice nilpotente, et on en déduisait des inégalités sur les normes matricielles.

Enfin, dans la partie III, on cherchait la loi de la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus à l'issue des  $k$  premiers lancers, dans un jeu de Pile ou Face avec  $m$  pièces dont les probabilités d'obtention de Pile ou Face étaient différentes d'une pièce à l'autre.

Le problème ne se prêtait guère à un « grappillage » de points, et il a joué, compte tenu d'un barème adapté (46% pour le préliminaire et la partie I.A, 26% pour la partie I.B, 20% pour la partie II, et 8% pour la partie III), son rôle de classement des candidats.

## ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

### PRÉLIMINAIRE ET PARTIE I.A

- 1) La plupart des candidats ont proposé le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 1, et peu d'entre eux ont ensuite su démontrer que la norme matricielle était sous-multiplicative.
- 4.a) L'étude de la limite de la série de terme général  $A^n$  a souvent conduit à des arguments hasardeux (tous les coefficients de  $A$  sont majorés en valeur absolue par 1).
- 4.b) Cette question, portant sur les valeurs propres, a été mieux comprise et résolue que la précédente.
- 7) Très peu de candidats ont abouti à la conclusion même si la majoration de la question 7.a) a souvent été obtenue. En effet, il était très tentant d'affirmer que la somme de la série numérique majorante était nulle puisque son terme général tendait vers zéro.

### PARTIE I.B

Cette partie n'a pas été très réussie dans l'ensemble, mais un bon nombre de candidats ont su exploiter leurs connaissances et les questions précédentes pour montrer que l'exponentielle d'une matrice symétrique était symétrique définie positive.

## PARTIE II

Même si l'examen du produit matriciel pouvait être utile, il était préférable d'utiliser l'endomorphisme associé. Par la suite, sans doute pris par le temps, les candidats ont aligné des calculs, sans toujours les justifier correctement lorsque, par exemple, on envisageait un produit d'exponentielles de matrices.

## PARTIE III

Les matrices  $R$  de la partie précédente devaient permettre d'étudier la loi de la variable aléatoire  $S$ , mais le lien n'a été vu que dans les meilleures copies. La dernière question, qui portait sur une simulation de  $S$  par un programme Pascal, a souvent été résolue correctement.

## RECOMMANDATIONS AUX FUTURS CANDIDATS

Pour ce qui concerne la forme, le jury conseille aux futurs candidats de lire attentivement le texte préliminaire qui précède toute épreuve de mathématiques, dans lequel il est précisé notamment, que la lisibilité et la qualité de la rédaction entrent pour une part non négligeable dans l'appréciation des copies. Il est également conseillé de bien numéroter ses questions et d'encadrer ses résultats.

De plus, les raisonnements doivent être clairs et précis, les affirmations étant étayés par une argumentation solide. Par exemple, le recours trop fréquent à des phrases du type « il est clair que... » doit être évité au profit d'une justification correcte fondée sur un apprentissage très sérieux et une très bonne connaissance du cours.

Enfin, le jury recommande aux futurs candidats de prendre le temps de lire l'ensemble du sujet, non seulement pour s'en imprégner, mais aussi pour pointer les questions qui paraissent faciles à résoudre, lesquelles ne se situent pas nécessairement dans la première partie du sujet.