ECRICOME 2006
Option Economique

1 EXERCICE

. On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$.f(x) = x + 1 + 2e^x$$

ainsi que la fonction g des deux variables réelles x et y définie par :

$$g(x, y) = e^x \left(x + y^2 + e^x\right)$$

1.1 Recherche d'extremum local de g.

1. Etudier les variations de f et donner les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
2. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote.
3. Déduire des variations de f l'existence d'un unique réel α, élément de l'intervalle $[-2, -1]$ tel que $f(\alpha) = 0$. (on rappelle que $e \simeq 2,7$)
4. Déterminer le seul point critique de g, c'est-à-dire le seul couple de $\mathbb{R}^2$, en lequel g est susceptible de présenter un extremum.
5. Vérifier que g présente un extremum relatif β en ce point. Est-ce un maximum ou un minimum ?
6. Montrer que l'on a :
$$4\beta + \alpha^2 - 1 = 0$$

1.2 Etude d'une suite réelle.

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = -1$ et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

1. Prouver que f est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que que pour tous réels x et t :
$$f(x) + (t - x) f'(x) \leq f(t)$$
2. En déduire l'inégalité suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha \leq u_{n+1}$$
Puis que pour tout entier naturel n. :
$$\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n \leq -1$$
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel à préciser
3. On admet que pour tout x de l'intervalle$[-2, -1]$:
$$0 \leq (x - \alpha) f'(x) - f(x) \leq \frac{(x - \alpha)^2}{e}$$

a) Prouver alors que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{e}$$

b) Puis démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n - \alpha \leq \frac{1}{e^{2^n - 1}}$$

4. Écrire un programme en langage Pascal permettant, lorsque l'entier naturel p est donné par l'utilisateur, de calculer une valeur approchée de α, de telle sorte que l'on ait :

$$0 \leq u_n - \alpha \leq 10^{-p}$$

2 EXERCICE

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n de la variable réelle x par :

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

1. Justifier que $f_n(x)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$.
2. Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$
3. O pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$

a) A l'aide d'une intégration par parties portant sur des intégrales définies sur le segment $[0, A]$ avec $A \geq 0$, prouver que pour tout entier naturel n :

$$I_{n+2} = (n+1)\,I_n$$

b) En utilisant la loi normale centrée réduite, justifier que :

$$I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

c) Donner la valeur de I_1

d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!} \\ I_{2n+1} &= 2^n n! \end{aligned}$$

4. Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$\begin{cases} f(x) = f_1(x) & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a) Démontrer que f est une densité de probabilité.

b) Soit X une variable aléatoire réelle qui admet f pour densité de probabilité.

i. Justifier que X admet une espérance $E(X)$, et préciser sa valeur

ii. Justifier que X admet une variance $V(X)$, et préciser sa valeur.

5. On désigne par F et G les fonctions de répartitions respectives de X et de $Y = X^2$

a) Exprimer $G(x)$ en fonction de $F(x)$ en distinguant les deux cas : $x < 0$ et $x \geq 0$

b) En déduire que Y est une variable à densité. Reconnaître la loi de Y et donner la valeur de $E(Y)$ et $V(Y)$

3 EXERCICE.

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à l'entier naturel 2.

3.1 Étude d'un endomorphisme de E.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe la fonction polynôme Q telle que :

$$\text{pour tout } x \text{ réel :} \qquad Q(x) = (x-1)P'(x) + P(x)$$

et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :

$$\text{pour tout réel } x : \qquad P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x \text{ et } P_2(x) = x^2$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Vérifier que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$, s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Quelles sont les valeurs propres de f ? f est-il diagonalisable ? f est-il un automorphisme de E ?

4. Déterminer l'image par f des fonctions polynômes R_0, R_1, R_2 définies par :

$$\text{pour tout réel } x : \qquad R_0(x) = 1,\ R_1(x) = x-1 \text{ et } R_2(x) = (x-1)^2$$

5. Montrer que $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de vecteurs propres de f. Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.

6. Vérifier que pour tout réel x :

$$\begin{cases} R_2x + 2R_1(x) + R_0(x) = P_2(x) \\ R_1(x) + R_0(x) = P_1(x) \end{cases}$$

En déduire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$

7. Écrire A^{-1} en fonction de D^{-1}. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\left[A^{-1}\right]^n = P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1}$$

et expliciter la troisième colonne de la matrice $[A^{-1}]^n$

3.2 Suite d'épreuves aléatoires.

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.
On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j, le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j.

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{ème}$ épreuve ($k \geq 0$)
On note alors U_k la matrice unicolonne définie par :

$$U_k = \begin{pmatrix} \mathrm{P}[X_k = 0] \\ \mathrm{P}[X_k = 1] \\ \mathrm{P}[X_k = 2] \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{P}[X_k = j]$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{ème}$ épreuve.
On convient de définir la matrice U_0 par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la loi de X_2 (On pourra s'aider d'un arbre). Calculer l'espérance et la variance de X_2
2. Par utilisation de la formule des probabilités totales, prouver que pour tout entier naturel k :

$$U_{k+1} = A^{-1} U_k$$

3. Écrire U_k en fonction de A^{-1} et U_0
4. Pour tout k de $\mathbb{N}$, donner la loi de X_k et vérifier que l'on a :

$$\lim_{k \to +\infty} \mathrm{P}[X_k = 0] = 1, \quad \lim_{k \to +\infty} \mathrm{P}[X_k = 1] = 0, \quad \lim_{k \to +\infty} \mathrm{P}[X_k = 2] = 0$$