Concours **EDHEC** — *Classes Préparatoires* — **Mai 2008**

MATHEMATIQUES

Option économique

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$.

On appelle (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 5 cm.

1) a) Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.
   b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.
   b) Montrer que les droites (D_n) et (D_n') d'équations $y = nx$ et $y = nx + 1$ sont asymptotes de (C_n).
   c) Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n, de (C_n).
   d) Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en A_1 puis tracer sur un même dessin les droites (D_1), (D_1') et (T_1) ainsi que l'allure de la courbe (C_1).

3) a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.
   b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{-1}{n} < u_n < 0$.
   c) En déduire la limite de la suite (u_n).
   d) En revenant à la définition de u_n, montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

Exercice 2

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}$.

1) a) Déterminer la matrice $A(A-2I)^2$ et en déduire les seules valeurs propres possibles de f.
   b) On considère les vecteurs $u = (2, 1, -2)$ et $v = (3, 1, -2)$.

Déterminer $f(u)$ et $f(v)$ puis en déduire les valeurs propres de f.

c) L'endomorphisme f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

2) On considère le vecteur $w = (-2, 0, 1)$.

a) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Exprimer $f(w)$ comme combinaison linéaire de v et w puis vérifier que la matrice de f dans la base (u, v, w) est $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Montrer que f n'est pas diagonalisable.

3) a) On pose $T = D + N$, où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminer N^2 puis utiliser la formule du binôme pour montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $T^n = D^n + nD^{n-1}N$.

b) Donner explicitement, pour tout entier naturel n non nul, la matrice T^n en fonction de n.

c) Proposer une matrice P telle que $A = PTP^{-1}$ puis déterminer P^{-1}.

d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $A^n = PT^nP^{-1}$

e) Déterminer explicitement A^n pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Exercice 3

1) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$ est convergente et donner sa valeur.

2) On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2(1+|x|)^2}$.

a) Montrer que f est paire.

b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et admettant f comme densité. On note F la fonction de répartition de X.

3) On pose $Y = \ln(1 + |X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Déterminer $Y(\Omega)$.

b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F.

c) En déduire que Y admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

d) Montrer enfin que Y suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

Problème

Partie 1 : préliminaires

1) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$. On se propose, dans cette question, de démontrer un résultat classique sur les sommes de Riemann associées à cette fonction.

a) Montrer qu'il existe un réel M strictement positif tel que, pour tout couple (x, y) d'éléments de $[0, 1]$, on a : $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}],\ |f(t) - f(\frac{k}{n})| \leq M(t - \frac{k}{n})$.

c) Montrer alors que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall k\in[\![0, n-1]\!]$, $\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt - \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) \right| \leq \frac{M}{2n^2}$.

d) En sommant la relation précédente, établir que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left| \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \right| \leq \frac{M}{2n}$.

e) Conclure finalement que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(t)\,dt$.

2) Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q\,dx$.

a) Montrer que : $\forall (p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, $I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1,q-1)$.

b) En déduire que : $\forall (p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $I(p,q) = \frac{p!\,q!}{(p+q)!} I(p+q,0)$.

c) Déterminer $I(p+q,0)$ et montrer finalement que : $\forall (p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $I(p,q) = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$.

3) Informatique.
Compléter la déclaration récursive suivante afin qu'elle permette le calcul de $I(p,q)$:

```
Function i(p, q : integer) : real ;
Begin
If q = 0 then i : = ------ else ------ ;
End ;
```

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Dans cette partie, m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.
On considère une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geq 1}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, U_n suit la loi uniforme sur $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\}$.
On considère également une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$, définies elles aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, et pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, la loi de X_n conditionnellement à l'événement $(U_n = \frac{k}{n})$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(m, \frac{k}{n})$.

1) On considère une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$. Rappeler la valeur de l'espérance de Y puis montrer que $E(Y(Y-1)) = m(m-1)p^2$.
2) Donner la loi de X_1.

Dans toute la suite, on suppose n supérieur ou égal à 2.

3) a) Déterminer $X_n(\Omega)$, puis montrer que, pour tout i de $X_n(\Omega)$, on a :

$$P(X_n = i) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

b) Utiliser la première question de cette partie pour donner sans calcul la valeur de la somme $\sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$. Montrer alors que l'espérance de X_n est égale à $\frac{m(n-1)}{2n}$.

c) En utilisant toujours la première question de cette partie, donner sans calcul la valeur de la somme $\sum_{i=1}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$.

Montrer alors que l'espérance de $X_n(X_n-1)$ est égale à $\frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

d) En déduire finalement que la variance de X_n est égale à $\frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}$.

4) a) En utilisant les résultats obtenus aux deux premières questions de la première partie, calculer, pour tout i de $X_n(\Omega)$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = i)$.

b) En déduire que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi.

c) Vérifier que $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X)$ et $\lim_{n\to+\infty} V(X_n) = V(X)$.