



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur Épreuves ESC : ESC CHAMBERY

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES

Mercredi 14 mai 2008, de 14 h. à 18 h.

Code sujet

293

ESC__MATE

N.B.

Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On note \mathcal{BC} la base canonique de \mathbb{R}^3 et on définit les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_y = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & y \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice A dans la base canonique \mathcal{BC} .

On note id l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice I dans la base canonique \mathcal{BC} .

1. (a) Calculer $(A - 2I)^2$ puis vérifier que $(A - 2I)^3 = O_3$ (matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).
- (b) En déduire que le réel 2 est l'unique valeur propre de A et déterminer une base et la dimension du sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2.
2. Montrer par une méthode du pivot que P_y est inversible si et seulement si $y \neq -1$.
3. On note dans toute la suite les vecteurs : $u_1 = (0, 4, 4)$ et $u_2 = (2, 0, 2)$.
 - (a) Déterminer l'unique vecteur u_3 de la forme $u_3 = (1, y, 0)$ tel que : $f(u_3) = u_2 + 2u_3$.
 - (b) Donner la matrice de passage P de la base \mathcal{BC} à la famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$.
Montrer à l'aide de la question 2 que P est inversible puis justifier que la famille \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 .
 - (c) Exprimer $f(u_1)$ en fonction de u_1 , puis $f(u_2)$ en fonction de u_1 et u_2 .
En déduire que la matrice T de l'endomorphisme f dans la base \mathcal{B}' est $T = 2I + N$.
Donner, en la justifiant en une seule ligne, la relation liant les matrices A, T, P et P^{-1} .

On cherche maintenant à déterminer l'ensemble S des endomorphismes h de \mathbb{R}^3 vérifiant la relation **[R]** :

$$\mathbf{[R]} : f \circ h = h \circ f$$

4. (a) On note M' la matrice de l'endomorphisme h relativement à la base \mathcal{B}' .
Montrer que : $\mathbf{[R]} \Leftrightarrow (NM' = M'N)$.
- (b) En posant $M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$, montrer que : $\mathbf{[R]} \Leftrightarrow M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ 0 & a & a' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.
- (c) Calculer la matrice N^2 et en déduire que $S = \text{Vect}(id, f - 2id, (f - 2id)^2)$.
- (d) On note $\mathcal{G} = (I, N, N^2)$. Montrer que \mathcal{G} est libre et en déduire la dimension de S .
On note $\mathcal{F}' = (id, f, f^2)$. Montrer que \mathcal{F}' est une base de S .

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel non nul. On considère dans cet exercice une variable aléatoire X_n qui suit la loi normale de paramètres $m = 0$ et $\sigma^2 = \frac{1}{n}$. (loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$).

1. (a) Justifier que la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par $f_n(t) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n}{2}t^2}$ est une densité de X_n .
- (b) Justifier que f_n est paire.
- (c) Dans cette question uniquement on considère que $n = 4$, et on donne $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0,8$.
Représenter l'allure de la courbe représentative de f_4 dans un repère orthonormé et situer les points d'inflexion de cette courbe en donnant leur abscisse (leur ordonnée vaut environ 0,5).
- (d) Justifier graphiquement l'égalité : $P(X_n \leq 0) = P(X_n \geq 0) = \frac{1}{2}$.

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

On donne en outre la valeur approchée $\Phi(1) \approx 0,8$.

2. (a) Justifier que $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ puis montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$.
- (b) En déduire que Φ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi'(x) = f_1(x)$.
- (c) Justifier que la variable $\sqrt{n} X_n$ suit la loi normale centrée réduite.
En déduire : $P(0 \leq X_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}) \approx 0,3$.

On note dans toute la suite H la fonction définie sur \mathbb{R} par
$$\begin{cases} H(x) = e^{-\frac{1}{x}} \Phi(x) & \text{si } x \neq 0 \\ H(0) = 0 \end{cases}$$

3. (a) Etablir les résultats suivants :
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} H(x) = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} H(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} H(x) = 0$.
- (b) Justifier que H est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* et que H est continue à droite en 0.
- (c) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $H'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x^2}$.

Justifier $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

En déduire que H est dérivable à droite en 0 et que $H'_d(0) = 0$.

- (d) Etudier les variations de H et tracer l'allure de la courbe de H dans un repère orthonormé.
(On fera apparaître les caractéristiques étudiées, et on utilisera $H(1) \approx 0,3$)

EXERCICE 3

Les parties A et B sont indépendantes .

Un joueur A dispose d'une pièce qui a la propriété de faire PILE avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Un joueur B dispose d'une pièce qui a la propriété de faire PILE avec la probabilité $p \in]0; 1[$.

Les résultats des lancers de ces pièces seront toujours supposés indépendants .

PARTIE A

Dans cette partie on effectue le jeu suivant :

Les joueurs A et B lancent leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'au moins une des deux pièces donne PILE .

Si A et B font PILE simultanément , le jeu s'arrête sans que personne n'ait gagné d'argent .

Sinon , le premier à obtenir PILE s'arrête et l'autre continue ses lancers jusqu'à obtenir PILE également et paye un euro à son adversaire à chacun des lancers de cette série " en solitaire " .

Par exemple si A a obtenu PILE pour la première fois à son 7° lancer et si B a obtenu PILE pour la première fois à son 11° lancer , c'est B qui doit payer à A la somme de 4 euros .

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers effectués par le joueur A , Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers effectués par le joueur B et $Z = Y - X$.

1. Justifier que les variables X et Y suivent des lois géométriques dont on donnera le paramètre .

Préciser $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et les valeurs de $P(X = k)$, $P(Y = k)$, $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$.

2. (a) Montrer que $E(Z) = \frac{1 - 3p}{p}$ et $V(Z) = \frac{6p^2 - p + 1}{p^2}$.

(b) Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k) = \frac{p}{1 + 2p}$ et en déduire $P(Z = 0)$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P(Z = n) = \frac{p}{1 + 2p} (1 - p)^n$ et en déduire $P(Z > 0)$.

En déduire $P(Z < 0)$ puis interpréter les événements $(Z = 0)$, $(Z > 0)$, $(Z < 0)$.

PARTIE B

On veut d'abord programmer en Turbo-Pascal le lancer simultané des deux pièces par les joueurs A et B .

1. En utilisant la fonction **random** , recopier et compléter la fonction suivante pour qu'elle simule ce lancer simultané et renvoie 0 si les résultats de A et B sont identiques et 1 s'ils sont différents .

```
function lancer ( p : real ) : integer ;  
var A , B : char ;  
begin  
    if ( ..... ) then A := ' P ' else A := ' F ' ;  
    if ( ..... ) then B := ' P ' else B := ' F ' ;  
    if ( ..... ) then lancer := 0 else lancer := 1 ;  
end ;
```

2. Montrer que la probabilité que les lancers de A et B soient différents est $\frac{1 + p}{3}$.

On procède alors au jeu suivant : (N est un entier naturel fixé non nul) .

Les joueurs A et B lancent leur pièce simultanément N fois de suite .

Le joueur B paye un euro à A à chaque fois que les pièces n'affichent pas le même résultat .

On note H_N la variable aléatoire égale à la somme payée par le joueur B au joueur A .

3. Justifier que H_N suit une loi classique que l'on détaillera .

4. Montrer que $\left(\frac{3H_N}{N} - 1 \right)$ est un estimateur sans biais du réel p et déterminer son risque quadratique .