ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION ECONOMIQUE

MARDI 18 MAI 2004 , de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique

est interdit pendant cette épreuve".

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants.

N.B. Il est demandé au candidat d'indiquer, **impérativement,** son numéro d'inscription sur les copies.

EXERCICE 1

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ainsi que les matrices colonne d'ordre 3 : $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de G et vérifier que X_1, X_2, X_3 sont des vecteurs propres de G.

2. (a) Calculer les produits HX_1, HX_2, HX_3.

   (b) Montrer que la matrice P est inversible, et que les produits $P^{-1}GP$ et $P^{-1}HP$ fournissent deux matrices diagonales (que l'on déterminera).

   (c) Montrer que 0 est valeur propre de $H - G$, avec comme sous-espace propre associé la droite engendrée par X_1.

   Montrer que 0 est valeur propre de $2H + G$, avec comme sous-espace propre associé la droite engendrée par X_2.

   Montrer que 0 est valeur propre de $H + G$, avec comme sous-espace propre associé la droite engendrée par X_3.

On note dans toute la suite f l'application définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par $f(M) = HMG - GMH$.

3. (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (b) On suppose que M est une matrice appartenant au noyau $Ker(f)$.

   b1. Montrer que pour toute matrice colonne X d'ordre 3, $HMGX - GMHX = O$.

   En déduire les relations : $(H - G)MX_1 = O$.

   $(2H + G)MX_2 = O$.

   $(H + G)MX_3 = O$.

   b2. Montrer alors en utilisant la question 2(c) qu'il existe trois réels α, β, γ tels que

   $$MX_1 = \alpha X_1, MX_2 = \beta X_2, MX_3 = \gamma X_3.$$

   b3. En déduire la relation $P^{-1}MP = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$.

   (c) Soit E l'ensemble de toutes les matrices $P\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}P^{-1}$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

   Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension inférieure ou égale à 3.

   Déduire de la question 3.(b) que $Ker(f) \subset E$.

(d) Montrer que $HG = GH$, $HG^2 = G^2H$ et $H^2G = GH^2$.
En déduire que les matrices I , G et H sont éléments de $Ker(f)$.

(e) Montrer que la famille (I, G, H) est libre. Par une argumentation liée aux dimensions , montrer enfin que la famille (I, G, H) est une base de $Ker(f)$.

EXERCICE 2

On considère pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(t) = \frac{e^{-t}}{1+t^n}.$$

1. (a) Justifier la dérivabilité de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Etudier les variations de la fonction f_n , préciser sa limite en $+\infty$ et sa valeur en 0.

2. *Etude d'une suite d'intégrales impropres.*

On pose pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$

(Il est démontré dans le (a) que chacune de ces intégrales est convergente).

(a) Montrer que pour tout réel t strictement positif, $f_n(t) \leq \frac{1}{t^n}$.

En déduire la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$, puis de l'intégrale I_n.

(b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(t)dt = 0$.

(c) Montrer que pour tout réel t positif, $0 \leq e^{-t} - f_n(t) \leq t^n$.

(d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = 1 - \frac{1}{e}$.

(e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3. *Etude d'une fonction définie par des limites.*

(a) Pour tout réel t positif, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)$. (On distinguera $t < 1$, $t = 1$, $t > 1$).

(b) Dès lors , on définit sur $\mathbb{R}^+$ une fonction h par $h(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)$.

Donner la courbe représentative de h dans un repère orthonormé. (On donne $e^{-1} \cong 0{,}37$)
h est-elle continue ?

(c) Etudier l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(t)dt$. A-t-on ici $\int_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$?

ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION ECONOMIQUE

MARDI 18 MAI 2004 , de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique

est interdit pendant cette épreuve".

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants.

N.B. Il est demandé au candidat d'indiquer, **impérativement,** son numéro d'inscription sur les copies.