EXERCICE 1

On pose pour a réel strictement positif la fonction f_a définie sur $[0;a]$ par :

Pour tout $x \in [0;a]$, $f_a(x) = \dfrac{a-x}{a(a+x)}$.

1. (a) Justifier la dérivabilité de f_a sur $[0;a]$ et calculer sa dérivée.

   En déduire le tableau des variations de f_a en précisant les valeurs aux bornes.

   (b) Montrer que f_a réalise une bijection de $[0;a]$ sur $[0;\frac{1}{a}]$.

   On note f_a^{-1} sa bijection réciproque.

   Donner le tableau des variations de f_a^{-1} en précisant les valeurs aux bornes.

   (c) Montrer que $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

2. (a) Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^a f_a(x)dx$, notée I_a .

   (b) Déterminer deux constantes α et β telles que : $\forall x \in [0;a]$, $\dfrac{1-x}{1+x} = \alpha + \dfrac{\beta}{1+x}$.

   En déduire que $I_1 = 2\ln 2 - 1$.

   (c) Montrer grâce au changement de variable $x = au$ que $I_a = I_1$.

3. On considère dans ce paragraphe la fonction h_a définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{si} \quad x \in [0;a]\ ,\ h_a(x) = \dfrac{1}{2\ln 2 - 1} f_a(x) \\ \text{si} \quad x \notin [0;a]\ ,\ h_a(x) = 0 \end{cases}$$

   (a) Montrer que h_a est une densité de probabilité.

   On note X_a une variable aléatoire réelle admettant une densité égale à h_a .
   On note H_a la fonction de répartition de la variable X_a.

   (b) Calculer l'espérance $E(a + X_a)$. En déduire l'espérance $E(X_a)$.

   (c) Calculer l'espérance $E((a + X_a)^2)$. En déduire $E(X_a{}^2)$ puis la variance $V(X_a)$.

   (d) Soit la variable aléatoire à densité T définie par $T = \dfrac{1}{a} X_a$.

   Montrer que pour tout réel t de $[0;1]$: $P(T \le t) = H_a(at)$.

   En déduire que T suit la même loi que X_1.

EXERCICE 2

On considère pour n entier naturel non nul la matrice carrée d'ordre 3 suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{-1}{n} & \frac{n+2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{-1}{n} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et on note} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note f_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A_n relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère également les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} = (1,1,-1)$, $\vec{v} = (1,1,0)$ et $\vec{w} = (0,-1,1)$.

1. Déterminer pour tout triplet (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ l'expression de $f_n((x, y, z))$ en fonction de n, x, y, z.

2. (a) Montrer que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont vecteurs propres de f_n.

   (b) Montrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (c) En déduire une matrice P telle que :

   - P inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   - $P^{-1}A_n P = D_n$, où $D_n = I + \frac{1}{n}H$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. On pose pour tout entier naturel n non nul $\Pi_n = A_1 A_2 \cdots A_n$ (avec $\Pi_1 = A_1$).

   (a) Montrer que $\Pi_n = PD_1D_2 \cdots D_nP^{-1}$.

   (b) Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul :

   $$D_1D_2 \cdots D_n = I + nH \quad \text{où } H \text{ est la matrice définie au 2(c).}$$

   (c) En déduire les neuf coefficients de la matrice Π_n.

4. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul $D_1D_2 \cdots D_n$ est inversible

   et que $(D_1D_2 \cdots D_n)^{-1} = I - \frac{n}{n+1}H$ où H est la matrice définie au 2(c).

   (b) En déduire que Π_n est inversible et donner les neuf coefficents de Π_n^{-1}.

EXERCICE 3

On suppose que p est un réel fixé de $]0;1[$ qui représente la probabilité qu'un billet de 100 € soit faux.
On dispose d'un détecteur de faux billets imparfait qui allume une lumière qui est soit bleue lorsqu'il considère que le billet testé est vrai, soit rouge lorsqu'il considère que le billet testé est faux .

On note F : " Le billet testé est faux " et B : " La lumière qui s'allume est bleue ".
On note $P(\overline{F} / B) = \alpha$ et $P(F / \overline{B}) = \beta$, et on suppose dans tout l'exercice que $\alpha + \beta > 1$.

1. (a) En utilisant une formule des probabilités totales pour exprimer $P(F)$, montrer que $P(B) = \dfrac{\beta - p}{\alpha + \beta - 1}$. En déduire que $1 - \alpha \leq p \leq \beta$.

   (b) Montrer que la probabilité que le détecteur valide un faux billet est $P(B / F) = \dfrac{(1-\alpha)(\beta - p)}{p(\alpha + \beta - 1)}$.

   (c) On suppose dans cette question uniquement que $\beta = \alpha = 0{,}95$ et on note $x = \alpha + p - 1 = p - 0{,}05$. Montrer que $1 - P(B / F) = \dfrac{0{,}95x}{0{,}9(x + 0{,}05)}$.
   En déduire un réel a tel que $P(B / F) = 1 - ax + x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \varepsilon(x) = 0$.

2. On considère le programme Turbo-Pascal suivant , où p représente la valeur p citée en introduction :

```
program ESC2003 ;
var
x , v , d , r  :  real ;
begin
randomize ;
if  random < p  then  v := 0  else  v := 1 ;
r := random ;
x := r * r ;
d := ( 1 - x ) * v  +  x * ( 1 - v ) ;
end.
```

On rappelle que random est une variable à densité qui suit une loi uniforme et qui fournit à chaque appel un réel choisi au hasard dans [0 ; 1]. Les deux appels à la fonction random sont indépendants.
On note $V, D, R,$ les variables aléatoires égales au valeurs de v ,d ,r lorsque le programme a été exécuté.

   (a) Montrer que $P(V = 0) = p$.

   (b) Exprimer D en fonction de R et de V.

   (c) Soit s un réel fixé de] 0 ; 1 [, appelé " seuil ".
   En remarquant que R et V sont deux variables aléatoires indépendantes, montrer que :
   $P(D < s / V = 0) = \sqrt{s}$ et $P(D \geq s / V = 1) = \sqrt{1-s}$.
   En déduire $P(D < s) = p\sqrt{s} + (1 - p)(1 - \sqrt{1-s})$.

On utilise ce programme pour simuler un détecteur , avec $(V = 0)$ pour " le billet est faux " et $(D < s)$ pour " le rouge s'allume ".

   (d) Montrer que la probabilité que le détecteur se trompe est égale à $1 - (1 - p)\sqrt{1-s} - p\sqrt{s}$.

   (e) On suppose ici que $p = \dfrac{1}{4}$. Etudier sur] 0 ; 1 [la fonction définie par $f(t) = 3\sqrt{1-t} + \sqrt{t}$.

En déduire que pour le seuil $s = \frac{1}{10}$ la qualité du détecteur est maximum.