ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION ECONOMIQUE

JEUDI 4 MAI 2000 , de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique

est interdit pendant cette épreuve".

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants.

N.B. Il est demandé au candidat d'indiquer, **impérativement,** son numéro d'inscription sur les copies.

Exercice 1

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$.

   On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

   (a) Etudier les variations de f ainsi que ses limites en $-\infty$ et $+\infty$

   (b) Calculer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ à l'abscisse 0.

   (c) Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de T. Préciser les points d'intersection.

   (d) Construire $\mathcal{C}$ et T .

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{et} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n}{u_n^2+u_n+1} \end{cases}$.

   (a) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que : $f\left(\dfrac{1}{p}\right) \leq \dfrac{1}{p+1}$

   (b) En déduire par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3. (a) Vérifier que : $\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

   (b) En déduire, par récurrence et à l'aide du 2.(b) que : pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{u_n} \leq n+1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

4. (a) Justifier l'inégalité : pour tout entier $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k}\dfrac{dx}{x}$.

   (b) En déduire que : pour $n \geq 2$, $\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k} \leq \ln n$ puis que : pour $n \geq 2$, $\dfrac{1}{u_n} \leq n+2+\ln n$.

   (c) A l'aide des résultats précédents, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.

Exercice 2

Partie A

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble E des matrices M de $M_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$M = xA + yA^2 + zA^3 \quad \text{avec } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

1. (a) Calculer A^2 et A^3 .

   (b) Etablir que A, A^2 et A^3 sont linéairement indépendantes.

   (c) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. En donner une base et la dimension.

2. (a) Calculer les valeurs propres de A .

   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Partie B

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $u = (a, b, c)$ un élément de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par : $g(e_1) = e_2$, $g(e_2) = e_3$ et $g(e_3) = u$.

1. (a) Ecrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$.

   (b) En déduire que : $g(u) = e_1 \iff \begin{cases} ac & = 1 \\ a + bc & = 0 \\ b + c^2 & = 0 \end{cases}$.

2. Déterminer par leur matrice dans la base $\mathcal{B}$, quand ils existent, les endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$g(e_1) = e_2 \,,\; g(e_2) = e_3 \,,\; g(e_3) = u \;\text{ et }\; g(u) = e_1 .$$

Exercice 3

On dispose d'une urne contenant une boule blanche et une boule noire ainsi que d'une pièce non truquée. On considère l'expérience $\mathcal{E}$ suivante :

- on jette une fois la pièce
- si l'on obtient pile, on tire avec remise une boule de l'urne
- si l'on obtient face, on tire sans remise une boule de l'urne.

1. On répète deux fois $\mathcal{E}$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

   (a) Donner les valeurs de X .

   (b) Définir l'événement $(X = 2)$, en déduire $P[X = 2] = \frac{1}{8}$ et donner $P[X = 0]$.

   (c) Calculer l'espérance et la variance de X .

2. On répète $\mathcal{E}$ et on s'arrête dès que l'urne est vide ou dès que l'on a effectué $\mathcal{E}$ trois fois.
   Soient Y la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de $\mathcal{E}$ effectuées et Z la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

   (a) Calculer $P[Y = 2]$. En déduire la loi de Y .

   (b) Montrer que $P[Y = 3 \cap Z = 1] = \frac{11}{32}$. Déterminer la loi du couple (Y, Z) .

   (c) Calculer la covariance de ce couple.

3. On répète $\mathcal{E}$ jusqu'à ce que l'on obtienne la première boule blanche.
   Soit T la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de $\mathcal{E}$ ainsi effectuées.

   (a) Quel est l'ensemble des valeurs de T ?

(b) Calculer $P[T = 1]$ et $P[T = 2]$.

(c) Soit n un entier. Calculer pour $n \geq 3$ la probabilité de l'événement E_{n-2} : "les $n-2$ premières réalisations de $\mathcal{E}$ donnent chacune pile et une boule noire".

En déduire que : pour $n \geq 2$, $P[T = n] = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.

(d) Calculer l'espérance de T .