J. 19 1199

Code sujet : 285

Conception : ESCP Europe

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES

Lundi 6 mai 2019, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.
On rappelle que :

- *la probabilité d'un événement A est notée $P(A)$ et si C est un événement de probabilité non nulle, on note $P_C(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant C ;*
- *l'univers des résultats observables est noté Ω et si Z est une variable aléatoire, on note $Z(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par Z.*

EXERCICE 1

On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par :

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbf{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_{n+1} + v_n) \end{cases}.$$

1. Vérifier que $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $v_1 = \dfrac{3}{4}$; calculer u_2 et v_2.
2. Compléter le script *Scilab* suivant qui permet de déterminer u_n et v_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('entrez la valeur de n :')
u=.........
v=.........
for k=1:n
    u=.........
    v=.........
end
disp(u)
disp(v)
```


Tournez la page S.V.P.

3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose : $w_n = v_n - u_n$.

a) Établir pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'égalité : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} w_n$.

b) En déduire que la suite $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

c) (i) Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$

(ii) En déduire à l'aide de la question 3.a) l'expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

(iii) Vérifier que l'expression précédente reste valide pour $n = 0$.

d) Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et donner sa limite.

e) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n et donner la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

4.a) Justifier que l'unique réel α pour lequel la série de terme général $t_n = \frac{9}{8}(\alpha - u_n)$, avec $n \in \mathbf{N}$, est convergente est $\alpha = \frac{2}{3}$.

Dans les questions suivantes, on choisit $\alpha = \frac{2}{3}$.

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $t_n > 0$ et établir l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = 1$.

5. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{N}$, telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P([X = n]) = t_n$.

a) On pose : $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de la variable aléatoire Y.

b) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, on note M et I les deux matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.a) Calculer M^2 et montrer que $M^4 = I$.

b) En déduire que M est inversible et donner l'expression de M^{-1}, sans calcul, en fonction de M.

c) Compléter le script *Scilab* suivant permettant de saisir M, de calculer $N = M^{-1}$ et d'afficher les deux matrices M et M^{-1}.

```
M=[······;······;······]
N=·········
disp(M,'la matrice M est :')
disp(N,'la matrice inverse de M est :')
```

2.a) Montrer que la matrice $M - I$ est inversible.

b) Développer le produit matriciel $(M - I)(M^3 + M^2 + M + I)$, puis utiliser le résultat de la question 2.a) pour déterminer la matrice $M^3 + M^2 + M + I$.

c) Retrouver le résultat de la question 2.b) en calculant directement la matrice M^3.

3.a) Soit $x \in \mathbf{R}$. Développer le produit $(x+1)(x^2+1)$ et à l'aide de la question 2.b), en déduire que M possède au plus une valeur propre.

b) On pose : $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $M\,U$ et justifier que M possède une unique valeur propre dont on précisera la valeur.

4.a) On suppose l'existence de réels x, y, z, x', y' et z' vérifiant la relation : $xM^2 + yM + zI = x'M^2 + y'M + z'I$. Établir les égalités : $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

b) *On rappelle* que par convention, pour toute matrice carrée S, on a $S^0 = I$.
À l'aide d'un raisonnement par récurrence, déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique triplet de réels (a_n, b_n, c_n) tels que : $M^n = a_n M^2 + b_n M + c_n I$.
On donnera la valeur du triplet (a_0, b_0, c_0) et on vérifiera les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} a_{n+1} = b_n - a_n \\ b_{n+1} = c_n - a_n \\ c_{n+1} = -a_n \end{cases}.$$

5. Utiliser les relations trouvées à la question 4.b) pour compléter le script *Scilab* suivant afin qu'il calcule et affiche a_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('entrez la valeur de n :')
a=0
b=0
c=1
for k=1:n
    u=a
    a=·········
    b=·········
    c=·········
disp(a)
end
```

EXERCICE 3

Dans tout l'exercice, on note n un entier supérieur ou égal à 1 et $\overline{A}$ l'événement contraire d'un événement A.

On suppose que dans une certaine région, pendant une période donnée, seuls deux états météo sont possibles : le beau temps et le mauvais temps.
L'étude des bulletins météo du passé laisse penser que le temps qu'il fait un certain jour de cette période dépend du temps qu'il a fait la veille de la façon suivante :

- s'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est égal à $\frac{4}{5}$;
- s'il fait mauvais un jour donné, la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est égal à $\frac{2}{5}$.

On s'intéresse à une période débutant le jour 1, jour au cours duquel il a fait beau .
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note :

- B_n l'événement : « il fait beau le jour n » ;
- $\overline{B}_n$ l'événement « il fait mauvais le jour n » ;
- $u_n = P(B_n)$ et $v_n = P(\overline{B}_n)$.

1.a) Donner la valeur de u_1.

b) Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{B_n}(B_{n+1})$ et $P_{\overline{B}_n}(B_{n+1})$.

2.a) À l'aide de la formule des probabilités totales, établir la relation :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{4}{5}\, u_n + \frac{3}{5}\, v_n\,.$$

b) En déduire pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, u_{n+1} en fonction de u_n.

c) Déterminer pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'expression de u_n en fonction de n.

d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et interpréter ce résultat.

3.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a : $v_{n+1} = \dfrac{1}{5}\, u_n + \dfrac{2}{5}\, v_n$.

b) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note X_n la matrice à une ligne et deux colonnes suivante : $X_n = (u_n \quad v_n)$.
Déterminer la matrice carrée K, indépendante de n, qui vérifie la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ X_{n+1} = X_n\, K\,.$$

c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, donner pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'expression de X_{n+1} en fonction de X_1 et K.

d) En déduire l'expression (sous forme de tableau) de la matrice K^n en fonction de n.

4. On code un jour de beau temps par 1 et un jour de mauvais temps par 2.
On admet que la commande `x=grand(99,'markov',K,1)` renvoie un vecteur contenant autant de "1" que de jours de beau temps et autant de "2" que de jours de mauvais temps, et ceci, entre le deuxième jour et le centième jour.
Compléter le script *Scilab* suivant afin qu'il renvoie le nombre de jours de beau temps lors des 100 premiers jours de la période considérée, y compris le premier.

```
K=[······;······]
x=grand(99,'markov',K,1)-1
n=·········
disp(n,'le nombre de jours de beau temps est :')
```

5.a) Soit U_n l'événement «il fait beau pendant les n premiers jours de la période considérée». Calculer $P(U_n)$.

b) Soit V_n l'événement «il fait beau au moins deux fois lors des n premiers jours de la période considérée».
Calculer $P(V_n)$.

EXERCICE 4

Dans tout l'exercice, on note f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{2t}{(1+t^2)^2} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par :

$$\forall t \geqslant 0,\ g(t) = -\frac{1}{1+t^2}\,.$$

a) On note g' la dérivée de la fonction g. Pour tout réel $t \geqslant 0$, calculer $g'(t)$.

b) Pour tout $x \geqslant 0$, on pose : $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt$. Déduire de la question précédente la valeur de $I(x)$.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et vérifier que f est une densité de probabilité.

On considère désormais une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé, telle que $X(\Omega) = \mathbf{R}_+$ et admettant f comme densité.

2. On note F la fonction de répartition de X. Établir la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1+x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

3. On pose $Y = \dfrac{X^2}{1+X^2}$ et on note G la fonction de répartition de la variable aléatoire Y.

   a) Étudier les variations de la fonction Q qui, à tout réel $x \geqslant 0$, associe $Q(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, puis déterminer $Y(\Omega)$.

   b) Pour tout $y \in [0, 1[$, calculer $G(y)$ et en déduire que Y suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1[$.

   c) Vérifier que $X = \sqrt{\dfrac{Y}{1-Y}}$, puis compléter à l'aide de la commande `rand()`, le script *Scilab* suivant afin qu'il simule la variable aléatoire X.

```
Y=.........
X=.........
```

4. Pour tout réel $h > 0$, soit T_h la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0,\ T_h(x) = \frac{1}{h} \times P_{[X>x]}\big([X \leqslant x+h]\big).$$

   a) Soit x un réel strictement positif fixé. Montrer que l'on a : $\lim\limits_{h \to 0} T_h(x) = \dfrac{f(x)}{1-F(x)}$.

   b) Pour tout réel $x > 0$, on pose : $T(x) = \dfrac{f(x)}{1-F(x)}$. Déterminer explicitement $T(x)$.

   c) Pour tout réel $x > 0$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^x T(t)\,dt$ et exprimer cette intégrale en fonction de $F(x)$.

FIN