RAPPORT DE CORRECTION

DE MATHÉMATIQUES T

Conception BSB Burgundy School of Business

SOMMAIRE

Le sujet

BCE
ANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 294

Conception : BSB Burgundy School of Business

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 7 mai 2019, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

2. **Application à l'étude de deux suites**

   On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = 2a_n + 3^n \text{ et } b_{n+1} = 3b_n + 3^n$$

   a) Quelle instruction faut-il ajouter en ligne 4 dans le programme suivant pour qu'il affiche la valeur de a_n, l'entier n étant donné par l'utilisateur (on justifiera la réponse) ?

      i. `a=2*a+3^n`   ii. `a=2*a+3^(i-1)`
      iii. une autre instruction à préciser.

```
1.  n=input("n?")
2.  a=2
3.  for i=1:n
4.      ...
5.  end
6.  disp(a)
```

   Pour tout entier naturel n on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix}$.

   b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $X_{n+1} = AX_n$.

c) Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il affiche la valeur de a_n, l'entier n étant donné par l'utilisateur.

```
n=input("n?")
A=[....]
X=[....]
for i=1:n
    X=...
end
disp(X(1))
```

d) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que : $X_n = A^n X_0$.

e) En déduire en utilisant 1. que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $a_n = 2^n + 3^n$ et $b_n = n3^{n-1}$.

3. **Application au calcul des puissances d'une autre matrice**

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner P^{-1}.

b) Vérifier que $PMP^{-1} = A$.

c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $M^n = P^{-1}A^nP$.

En déduire que pour tout entier naturel n on a : $M^n = \begin{pmatrix} 2\times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}$.

4. **Application au calcul d'une somme**

a) Montrer que pour tout entier naturel k on a : $2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$.

b) Pour tout entier naturel n calculer : $\sum_{k=0}^{n} 3^k$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $\sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1}$.

d) Déduire des questions précédentes et de 2.e) que pour tout entier naturel n on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k3^{k-1} = \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2cm.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Que pouvez-vous en déduire sur la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f ?

2. a) Montrer que pour pour tout réel x on a : $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

   b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Comment interpréter graphiquement ce résultat ?

3. a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x, la relation : $f'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

   b) Déterminer le sens de variation de f. Dresser son tableau de variation en y faisant figurer les limites calculées aux questions 1 et 2 ainsi que $f(0)$.

   c) Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

4. On admet que pour tout réel x on a : $f''(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. Étudier la convexité de f.

5. Tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$.

6. Pour tout réel x, on pose : $h(x) = \ln(1+e^x)$.

   a) Calculer la dérivée de h.

   b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 3

Dans cet exercice on suppose que l'on dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient 4 boules rouges tandis que l'urne $\mathcal{U}_2$ contient deux boules rouges et deux boules blanches.

On commence par lancer une pièce non truquée. Si l'on obtient "pile" on choisit de faire une succession de tirages dans l'urne $\mathcal{U}_1$. Dans le cas contraire on choisit de faire les tirages dans l'urne $\mathcal{U}_2$.

On note F l'événement « la pièce amène face ». L'événement « la pièce amène pile » est donc $\overline{F}$. On définit également pour tout entier $k \geq 1$ l'événement R_k : « le k-ème tirage dans l'urne choisie amène une boule rouge ».

1. On lance la pièce, on choisit l'urne puis on effectue un tirage. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que la probabilité de tirer une boule rouge est $\dfrac{3}{4}$.

2. On lance la pièce, on choisit l'urne puis on effectue deux tirages *sans remise*. C'est-à-dire que la boule tirée lors du premier tirage n'est pas remise dans l'urne avant de procéder au deuxième tirage dans la même urne.

   a) Calculer $P_F(R_1 \cap R_2)$ et $P_{\overline{F}}(R_1 \cap R_2)$. En déduire que la probabilité que le tirage amène deux boules rouges de suite est $\dfrac{7}{12}$.

   b) On remarque à postériori que les deux boules tirées sont rouges. Quelle est la probabilité que la pièce ait amené pile ?

3. On lance la pièce, on choisit l'urne puis on décide de faire des tirages *sans remise* dans l'urne choisie jusqu'à ce que l'on soit en mesure de déterminer avec certitude dans quelle urne l'on se trouve. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

   a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![1,4]\!]$.

   b) Expliquer pourquoi $(Y=1) = F \cap B_1$. En déduire $P(Y=1)$.

   c) Calculer de même $P(Y=2)$.

   d) Justifier que $P(Y=4) = \dfrac{1}{2}$. Déduire alors des questions précédentes que $P(Y=3) = \dfrac{1}{12}$.

   e) Calculer $E(Y)$.

Exercice 4

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie par : $\begin{cases} f_n(t) = nt^{n-1} & \text{si } t \in [0,1] \\ f_n(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$.

   b) Montrer que f_n est une densité de probabilité.

2. Soit X_n une variable aléatoire ayant f_n comme densité. On note F_n la fonction de répartition de X_n.

   a) Calculer $F_n(x)$ pour tout réel $x < 0$ et tout réel $x > 1$.

   b) Montrer que pour tout réel $x \in [0;1]$ on a : $F_n(x) = x^n$.

3. Montrer que X_n admet une espérance et que $E(X_n) = \dfrac{n}{n+1}$.

4. **Un exemple.**

   Une cible circulaire de rayon 1 mètre est posée au sol. Deux joueurs 1 et 2 lancent chacun un palet en direction de la cible. On note U_1 et U_2 les variables aléatoires égales aux distances respectives en mètres entre le centre de la cible et les points d'impact des palets des joueurs 1 et 2. On suppose que U_1 et U_2 suivent des lois uniformes sur $[0;1]$ et qu'elles sont indépendantes.

   On note Z la variable aléatoire égale à la plus grande valeur entre U_1 et U_2 et H sa fonction de répartition.

   On rappelle l'expression de la fonction de répartition F d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0;1]$:

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F(x) = x & \text{si } x \in [0;1] \\ F(x) = 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   a) Justifier que pour tout réel x on a : $P(Z \leq x) = P([U_1 \leq x] \cap [U_2 \leq x])$.

   En déduire, l'expression de $H(x)$ pour tout réel x. Vérifier que Z et X_2 suivent la même loi.

   b) Calculer $P(Z \geq \frac{1}{3})$ et $P(\frac{1}{3} \leq Z \leq \frac{1}{2})$. Vérifier que $P_{(Z \geq \frac{1}{3})}(Z \leq \frac{1}{2}) = \dfrac{5}{32}$.

   c) Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il simule l'expérience ci-dessus et qu'il affiche la valeur de Z.

```
1.U1=grand(1,1,'unf',0,1)
2.U2=grand(1,1,'unf',0,1)
3.if U1>=U2 then
4.    ....
5.else
6.    ....
7.end
8.disp(Z)
```

5. On revient au cas général où n est un entier naturel non nul quelconque. On pose $Y_n = -\ln(X_n)$. On admet que l'on définit ainsi une variable aléatoire à densité. On note G_n sa fonction de répartition.

   a) Montrer que pour tout réel x on a : $G_n(x) = 1 - F_n(e^{-x})$.

   b) Vérifier que si $x < 0$ alors $e^{-x} > 1$. En déduire $G_n(x)$ lorsque $x < 0$.

   c) En utilisant 2.b) calculer $G_n(x)$ lorsque $x \geq 0$. Reconnaître la loi de Y_n.

   d) Donner $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

Le sujet

Le sujet proposé aux candidats était constitué de 4 exercices recouvrant une très large partie du programme des deux années.

- Exercice 1 – Algèbre linéaire. Puissances d'une matrice. Application à l'étude de deux suites puis à l'étude des puissances d'une autre matrice et enfin au calcul d'une somme. Simulation informatique.
- Exercice 2 – Analyse. Etude d'une fonction f (limites – variations – convexité – représentation graphique). Calcul d'une intégrale généralisée liée à f.
- Exercice 3 – Probabilités discrètes. Une urne contient 4 boules rouges, une autre contient deux boules blanches et deux boules rouges. On choisit une urne au hasard puis on fait des tirages successifs d'une boule sans remise dans cette urne. Modélisation de cette expérience. Recherche du temps d'attente avant d'être certain de connaître l'urne choisie.
- Exercice 4 – Probabilités. Étude d'une variable aléatoire à densité. Application à l'étude du lancer de deux palets en direction d'une cible.

Les attentes du jury

L'objectif de l'épreuve est de valoriser les étudiants ayant travaillé avec sérieux et ayant fait un effort de compréhension des démarches mathématiques mises en œuvre pendant leurs deux années de préparation. Les exercices sont souvent proches de ceux que les candidats n'ont pas manqué de rencontrer avec leur professeur. On ne cherche pas à piéger les candidats. Ainsi, les résultats intermédiaires sont le plus souvent donnés afin de permettre à un étudiant ayant échoué à une question de poursuivre l'exercice.

La répartition des points attribués entre les exercices était la suivante :

Exercice 1 : 28%, Exercice 2 : 24%, Exercice 3 : 16%, Exercice 4 : 32%

Le sujet était long et les correcteurs en ont tenu compte.

Le sujet comportait une erreur dans l'énoncé de l'exercice 3. Les candidats ont été peu gênés par cette erreur qui arrivait à la fin de l'exercice. Les deux questions problématiques ont été neutralisées afin de ne pas pénaliser les candidats.

Remarques de correction

Les correcteurs ont remarqué une très grande hétérogénéité des prestations avec des copies d'un très bon niveau : 33 étudiants obtiennent ainsi la note maximale de 20. Le nombre d'excellentes copies diminue nettement cette année. C'est sans doute lié à la restriction faite à l'inscription au concours des candidats marocains n'ayant pas un bac STMG.

On rencontre aussi un grand nombre de notes très basses : 18,5% des candidats obtiennent une note inférieure à 5. Ces notes sont obtenues par des candidats en perdition et dont le niveau de compréhension est très faible voire parfois inexistant. Ces candidats ne maîtrisent en général pas les bases du calcul de collège (fractions – puissances – règles de priorité) et ont sans doute très peu mis à profit les 6 heures de cours hebdomadaires dont ils ont bénéficié pendant leurs deux années de classe préparatoire.

Nous organisons les remarques que l'on peut faire sur le sujet par compétences (cf. programme officiel).

Communiquer par écrit

Il y a une amélioration de l'état des copies par rapport aux années antérieures. Si l'on fait abstraction de l'orthographe toujours aussi défaillante, la présentation des copies est correcte. Il reste cependant encore trop de copies mal présentées (ratures, écriture peu lisible). Trop peu de candidats mettent en valeur leurs résultats.

Les résultats intermédiaires étant souvent donnés, les tentatives d'escroquerie pour les obtenir à tout prix sont nombreuses. Elles sont bien sûr sanctionnées par les correcteurs.

Interpréter

Cette compétence n'est que rarement acquise. Trop d'étudiants manquent de bon sens et peinent à analyser leurs résultats. Ainsi dans l'exercice 2, très peu de candidats réussissent à analyser graphiquement leurs limites.

Les calculs de deux questions successives peuvent aussi être incohérents sans que le candidat ne s'en émeuve. De même il n'est pas rare de rencontrer des candidats qui trouvent des probabilités supérieures à 1 voire négatives !

Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates

La plupart des étudiants arrivent à reproduire des séquences vues en classe durant leurs deux années de préparation mais ils le font souvent sans maîtriser les concepts mathématiques qui y sont liés et préfèrent réciter par cœur plutôt que de s'adapter à l'énoncé de l'exercice qu'ils traitent. On note encore cette année des étudiants « hors-sujet » plaquant sur une question une « recette » apprise par cœur mais inadaptée à la question posée.

Modéliser

Les questions d'informatique ont été peu abordées et souvent mal. La typographie de ce langage n'est pas connue (ainsi * n'apparaît pas pour les multiplications). Sans parler d'être capables d'écrire un programme les candidats sont en difficulté pour comprendre le contenu d'un programme existant.

Maîtriser les concepts et les techniques mathématiques

Curieusement, les étudiants sont plus à l'aise avec les concepts qui n'ont été abordés qu'en classe préparatoire (matrices, calcul intégral, variables aléatoires à densité). En revanche, certaines lacunes du lycée n'ont pas été comblées. C'est le cas de l'étude des fonctions.

On note également un nombre important de candidats (environ un quart) en difficulté sur des notions de collège : mise au même dénominateur, factorisation, parenthèses, règles de priorité, confusion entre les opérations. Ainsi dans l'exercice 3, les correcteurs ont pu lire ce type de calcul : $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{7}$

4 – Commentaires par exercices

Exercice 1

C'est l'exercice le plus abordé. Dans l'ensemble les étudiants maîtrisent le principe de récurrence. Les bases du calcul matriciel, aussi mais les calculs ne sont pas assez détaillés. On trouve ainsi souvent l'affirmation $A^0=I$ sans que les calculs nécessaires soient écrits. Même chose pour le calcul de A^{n+1} dans 1 ou de M^n dans 3.c). Les calculs de puissances posent de gros problèmes à beaucoup de candidats ce qui les amènent bien souvent à bluffer pour arriver aux résultats de l'énoncé.

Les questions d'informatique ont été souvent traitées mais rarement correctement en dehors de X=A*X dans 2.c).

Dans la question 3, les candidats récitent trop souvent par cœur, ainsi la formule $M=P^{-1}AP$ est le plus souvent utilisée dans la récurrence du 3.c) sans être justifiée.

La question 4 a joué son rôle de sélectivité. Seuls les très bons candidats l'abordent correctement. La formule de la somme des termes d'une suite géométrique n'est pas connue ou rarement ; la notion de somme télescopique a été plus abordée et souvent correctement.

Exercice 2

Cet exercice montre que les questions usuelles d'analyse ne sont pas maîtrisées par la plupart des candidats. Le calcul de limite est le plus souvent défaillant.

Il n'est pas normal d'arriver en fin de classe préparatoire sans connaître les limites de la fonction exponentielle. Les interprétations graphiques sont souvent hasardeuses. Le vocabulaire de base n'est que rarement maîtrisé avec notamment des incohérences entre la direction de l'asymptote et son équation. On peine à comprendre qu'un étudiant capable de donner une interprétation graphique correcte ne soit pas en mesure de tracer une courbe cohérente dans les questions suivantes.

Le calcul de dérivée est souvent juste dans 3.a). Attention cependant à la confusion entre e^{x^2} et $(e^x)^2$. Le tableau de variations dans la question suivante présente souvent des incohérences.

Dans un exercice d'analyse, il est important de vérifier la cohérence entre les différents résultats (variations et limites, convexité et asymptote). Trop peu d'étudiants ont le recul nécessaire pour repérer les contradictions.

La formule de l'équation de la tangente est le plus souvent connue. On regrette le nombre important de candidats qui oublient le « y=… ».

Beaucoup de candidats n'ont pas bien lu la question sur la convexité et ont calculé la dérivée seconde alors que l'on demandait d'admettre le résultat. L'étude du signe de f'' a posé beaucoup de problèmes.

Dans une copie, la présence d'une bonne représentation graphique est valorisée car elle permet au correcteur de vérifier les capacités de synthèse et de compréhension du candidat. Hélas, les correcteurs ont trop peu eu l'occasion de voir des représentations graphiques et celles qu'ils ont vues étaient bien souvent farfelues. Il faut noter qu'un nombre important de candidats sont en difficulté pour tracer la représentation graphique d'une droite.

Les correcteurs ont été agréablement surpris par la question 6 qui a le plus souvent été bien traitée lorsqu'elle était abordée.

Exercice 3

De façon générale, on trouve beaucoup d'écritures incorrectes à base d'intersections ou de réunions de probabilités, d'égalités entre probabilités et événements. Les erreurs de calculs sur les fractions sont très nombreuses. Le système complet d'événements est rarement cité dans la question 1.

De très nombreux candidats confondent probabilité conditionnelle et probabilité d'intersection. Ainsi dans la question 2 on voit souvent :

$$P(R_1 \cap R_2) = P_F(R_1 \cap R_2) + P_{\overline{F}}(F_1 \cap R_2)$$

Les questions 3.a) 3.d) et 3.e) ont été neutralisées au vu de l'erreur d'énoncé. Dans 3.b) la justification de l'égalité $(Y = 1) = F \cap B_1$ est rarement convaincante.

Exercice 4

C'est l'exercice le moins abordé mais quand il l'est c'est souvent bien. La première intégrale est souvent calculée correctement. Les candidats connaissent leur cours et connaissent les trois points à vérifier pour qu'une fonction soit une densité de probabilité mais ils ne vérifient pas correctement chaque point.

Dans la question 2, la formule $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ est souvent connue. Mais nombreux sont les étudiants qui choisissent x comme variable d'intégration. La relation de Chasles est souvent omise dans les justifications. Le calcul de l'espérance dans la question 3 est souvent correct.

Les questions 4 et 5 ont permis aux meilleurs candidats de se distinguer. L'argument de l'indépendance a été oublié de manière presque systématique dans 4.a). Les questions 5.c) et 5.d) ont été traitées plus souvent y compris par des étudiants moins brillants mais bons tacticiens.

Conseils aux futurs candidats

L'épreuve est conçue pour les étudiants sérieux qui ont travaillé avec régularité tout au long de leurs deux années de préparation. Il n'y a pas besoin d'être brillant en mathématiques pour réussir cette épreuve. Beaucoup d'étudiants visiblement en difficulté avec la matière réussissent à atteindre des notes entre 10 et 12 en repérant les questions « classiques » et en mettant à profit le travail sur les exercices « types » sur lesquels ils se sont entraînés pendant deux ans.

Hélas trop de candidats n'ont pas fait les efforts d'apprentissage suffisants pour arriver à cela.

Il est donc conseillé aux étudiants de connaître parfaitement les énoncés des théorèmes fondamentaux et de s'entraîner sur les exercices qu'ils auront rencontrés durant leurs deux années de préparation. Ils sauront ainsi s'adapter aux exercices de cette épreuve en apportant la rigueur nécessaire dans les solutions et en respectant les notations qu'ils ont rencontrées tout au long de l'année.

La présence d'une bonne représentation graphique est valorisée dans les copies. On invite les candidats à s'entraîner toute l'année à tracer l'allure de courbes afin d'être capables de se lancer le jour de l'épreuve.

Les questions d'informatique sont bien dotées en points et ne nécessitent pas un investissement considérable. Il ne faut pas négliger cette partie du programme.

Le jour de l'épreuve, on invite les candidats à lire en entier l'énoncé de chacun des exercices avant de commencer à les résoudre. Cela permet d'en comprendre la logique et d'éviter ainsi, peut-être, de réciter des séquences type sans les comprendre.