SUJET MATHÉMATIQUES 2007

Option Scientifiques

Exercice 1

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx$.

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose alors $v_n = \displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx$ et $w_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx$

   a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0 \leq w_n \leq \dfrac{1}{e}$.

   b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n \geq \dfrac{1}{e}\ln(n+1)$.

   c) Donner la limite de la suite (u_n).

3) On se propose de déterminer un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

   a) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$ est une intégrale convergente.

   b) Établir que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx \leq I$.

   c) En déduire un encadrement de v_n valable pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

   d) Donner enfin, en utilisant cet encadrement, un équivalent simple de u_n.

Exercice 2

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par (I, J, K, L) et Id l'endomorphisme identité de E.
On pose $A = J + K$.

1) Montrer que (I, J, K, L) est une base de E et donner la dimension de E.
2) a) Exprimer JK, KL et LJ en fonction respectivement de L, J et K.
   b) Calculer J^2, K^2 et L^2 puis en déduire que : $KJ = -L$, $LK = -J$ et $JL = -K$.
   c) En déduire que E est stable pour le produit matriciel.
3) Calculer A^2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.
4) On considère maintenant l'application φ_A qui à toute matrice M de E associe :
$$\varphi_A(M) = AMA^{-1}.$$
   a) Montrer que φ_A est un endomorphisme de E.
   b) Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi_A$ puis montrer que φ_A est un automorphisme de E.
5) a) Écrire la matrice Φ_A de φ_A dans la base (I, J, K, L), puis justifier que φ_A est diagonalisable.
   b) Donner les valeurs propres de φ_A ainsi que les sous-espaces propres associés.

On rappelle que l'application, notée tr, qui à toute matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ associe sa trace (c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux) est une application linéaire de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
On rappelle également que l'application qui à tout couple (M, N) de $E \times E$ associe le réel noté (M / N) défini par $(M / N) = \operatorname{tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur E.
On munit désormais E de ce produit scalaire.

6) a) Montrer que, pour tout couple (P, Q) de $E \times E$, $tr(PQ) = tr(QP)$.
   b) Établir alors que φ_A est un endomorphisme symétrique de E.
   c) En déduire que $\operatorname{Ker}(\varphi_A - Id)$ et $\operatorname{Ker}(\varphi_A + Id)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Exercice 3

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1) Rappeler quelle est la loi suivie par S_n. Donner l'espérance et la variance de S_n.
2) À l'aide du théorème de la limite centrée, établir que $\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leq n) = \dfrac{1}{2}$.
3) En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} dt$.
4) a) Utiliser le résultat précédent pour montrer que $\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz} dz \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n!}{2\,n^{n+1}}$.
   b) On admet que $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$. En déduire un nouvel équivalent de $\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz} dz$.

Problème

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On dispose de deux urnes U et V, l'urne U contenant une boule blanche et $(n-1)$ boules noires et l'urne V contenant une boule noire et $(n-1)$ boules blanches.
Un joueur choisit une urne au hasard pour le premier tirage puis il effectue des tirages d'une boule avec remise de cette boule dans l'urne dont elle provient, selon trois protocoles étudiés dans les trois parties de ce problème.
Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on note B_i l'événement « on obtient une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage ».
On note X le numéro du tirage où l'on obtient, pour la première fois, une boule noire et Y le numéro du tirage où l'on obtient, pour la première fois, une boule blanche. On admet que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Pour finir, on note U l'événement « le premier tirage a lieu dans l'urne U ».

Partie 1

Dans cette partie, les tirages qui suivent le premier tirage ont lieu dans l'urne qui a été choisie au premier tirage.

1) a) Déterminer $P(X = 1)$.

b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, écrire l'événement $(X = k)$ à l'aide de certains des événements B_i ou $\overline{B_i}$, puis montrer que :

$$\forall k \geq 2,\ P(X = k) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{n} \right).$$

Vérifier que cette formule reste valable pour $k = 1$.

2) Établir que X possède une espérance et donner sa valeur.

3) Montrer que X et Y suivent la même loi.

4) On décide de coder l'événement U par 1 et l'événement $\overline{U}$ par 0.
On rappelle que la fonction random renvoie, pour un argument k de type integer (avec $k \geq 1$) un entier aléatoire compris entre 0 et $k-1$ (ceci de façon équiprobable).
Compléter le programme suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience décrite dans cette partie.

```
Program edhec_2007 ;
Var   x, n, tirage, hasard : integer ;
Begin
   Randomize ; Readln(n) ; hasard : = random(2) ; x : = 0 ;
   If  hasard = 0  then  Repeat x : = x + 1 ; tirage : = random(n) ; until (tirage = 0)
                   Else  Repeat -------- ; tirage : = -------- ; until -------- ;
   Writeln(x) ;
End.
```

Partie 2

Dans cette partie, les tirages qui suivent le premier tirage ont lieu dans l'urne U si le tirage précédent a donné une boule blanche et dans l'urne V sinon.

1) a) Donner $P(X = 1)$.

b) En procédant comme dans la partie 1, montrer que :

$$\forall k \geq 2,\ P(X = k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} \frac{n-1}{n}.$$

2) Établir que X possède une espérance et donner sa valeur.

3) Montrer que X et Y suivent la même loi.

4) Avec les mêmes conventions et les mêmes notations que celles de la partie 1, écrire un programme permettant le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience décrite dans cette partie.

Partie 3

Dans cette partie, chacun des tirages suivant le premier tirage a lieu dans la même urne que le tirage qui le précède si ce dernier a donné une boule blanche et dans l'autre urne dans le cas contraire.

1) a) Donner $P(X = 1)$.

b) Toujours selon la même méthode, montrer que :

$$\forall k \geq 2,\ P(X = k) = \frac{(n-1)^{k-1} + n - 1}{2\,n^k}.$$

Vérifier que la formule précédente reste valable pour $k = 1$.

c) Établir que X possède une espérance puis montrer que $E(X) = \dfrac{n^2}{2\,(n-1)}$.

2) a) En procédant comme à la question 1b), montrer que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = 2\,i) = \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1} \frac{n^2 - 2n + 2}{2\,n^2}.$$

b) Montrer également que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = 2\,i + 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i}.$$

Vérifier que cette formule reste valable pour $i = 0$.

c) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E_{2n}(Y) = \sum_{k=1}^{2n} k\,P(Y = k)$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ E_{2n+1}(Y) = \sum_{k=1}^{2n+1} k\,P(Y = k)$.

Montrer que la suite $(E_{2n}(Y))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

Montrer que la suite $(E_{2n+1}(Y))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a la même limite que $(E_{2n}(Y))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

En déduire que Y possède une espérance et que $E(Y) = \dfrac{3n^2}{2\,(n^2 - n + 1)}$.

3) a) Montrer que X et Y suivent la même loi lorsque $n = 2$. Quelle est cette loi ?

b) Comment pouvait-on justifier, sans calcul, les deux résultats ci-dessus ?

4) Montrer que $E(Y) \leq E(X)$ avec égalité si et seulement si $n = 2$.

5) Écrire un programme permettant le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience décrite dans cette partie.