BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : EDHEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

18 mai 2018, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

La lettre n désigne un entier naturel non nul.
Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x possède une seule solution, notée u_n.

2) a) Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$.
   b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante.
   c) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$.
   d) Montrer par l'absurde que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.
   a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -n v_n$.
   b) Établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\dfrac{-\ln v_n}{n v_n}\right)}{-\ln v_n} = 0$ et en déduire que : $\ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln n$.
   c) Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

4) Donner la nature des séries de termes généraux v_n et v_n^2.

Exercice 2

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire noté $\langle\, ,\rangle$ défini par :

$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^3)^2,\ x=(x_1,x_2,x_3),\ y=(y_1,y_2,y_3),\ \langle x,y\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

La norme du vecteur x est alors définie par : $\| x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie la condition suivante :

$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^3)^2,\ \langle f(x),y\rangle = -\langle x,f(y)\rangle$$

1) Établir que : $\forall x\in\mathbb{R}^3$, $\langle f(x),x\rangle = 0$.

2) On admet que tout endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ admet au moins une valeur propre réelle. Montrer, en utilisant l'égalité obtenue à la question 1), que 0 est la seule valeur propre réelle de f.

Dans la suite, on se propose de montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0\\ -\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha \text{ réel}$$

3) Montrer que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

4) Résoudre le problème posé si $\dim\operatorname{Ker}(f) = 3$.

5) On suppose, dans cette question, que $\dim\operatorname{Ker}(f) = 2$.

a) Montrer que l'on peut trouver une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, où e_1 appartient à $\operatorname{Im}(f)$ et où (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\operatorname{Ker}(f)$.

b) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme : $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ b & 0 & 0\\ c & 0 & 0\end{pmatrix}$.

c) Vérifier que $\operatorname{Im}(f)$ est stable par f puis montrer que b et c sont nuls.

d) En considérant le réel $\langle f(e_1),e_1\rangle$, donner la valeur de a. Que dire de l'hypothèse $\dim\operatorname{Ker}(f) = 2$?

6) On suppose, dans cette question, que $\dim\operatorname{Ker}(f) = 1$.

a) Montrer que l'on peut trouver une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, où (e_1, e_2) est une base orthonormale de $\operatorname{Im}(f)$ et où e_3 appartient à $\operatorname{Ker}(f)$.

b) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme : $A=\begin{pmatrix} a & b & 0\\ c & d & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

c) Montrer que a et d sont nuls et que $c=-b$.

d) Conclure.

Exercice 3

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et on pose $Y=\sqrt{X}$.

1) On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'exp',1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Écrire une (ou des) commande(s) `Scilab` utilisant `grand` et permettant de simuler Y.

2) a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

b) En déduire une densité f_Y de Y.

3) a) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite.

b) En déduire que Y a une espérance et donner sa valeur.

4) On pose $U = 1 - e^{-X/2}$.

a) Vérifier que $U(\Omega) = [0,1[$.

b) Déterminer la fonction de répartition F_U de U et reconnaître la loi de U.

c) Exprimer X en fonction de U, puis en déduire une simulation `Scilab` de Y utilisant uniquement la fonction `rand`.

Problème

Dans ce problème, on désigne par λ un réel strictement positif.
On admet que toutes les variables aléatoires présentées dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On s'intéresse aux appels parvenant à un central téléphonique et on suppose, d'une part, qu'ils arrivent de façon indépendante au central, et d'autre part, que le nombre d'appels reçus par le central pendant un certain intervalle de temps est indépendant du nombre d'appels reçus par le central pendant un intervalle de temps disjoint du précédent.

Pour tout réel t positif, on note N_t la variable aléatoire égale au nombre d'appels reçus par le central pendant l'intervalle de temps $[0,t]$ et on pose, pour tout entier naturel n : $p_n(t) = P(N_t = n)$.

1) Justifier que $p_0(0) = 1$ et $p_n(0) = 0$ pour n supérieur ou égal à 1. En déduire la loi de N_0.

On admet que, pour tout entier naturel n, p_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\forall t \geq 0, \begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \; p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) \end{cases}$$

2) Pour tout entier naturel n et pour tout réel t positif, on pose : $f_n(t) = e^{\lambda t} p_n(t)$.

a) Montrer que la fonction f_0 est constante, puis utiliser la première question pour déterminer cette constante.

b) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n'(t)$ en fonction de λ et $f_{n-1}(t)$.

c) On suppose que, pour un certain entier naturel n non nul, on a : $\forall t \geq 0$, $f_{n-1}(t) = \dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$.

(i) Montrer qu'il existe une constante K telle que : $\forall t \geq 0$, $f_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} + K$.

(ii) En utilisant la valeur de $p_n(0)$ pour n supérieur ou égal à 1, donner l'expression explicite de $f_n(t)$ en fonction de λ, n et t.

3) a) Donner $p_n(t)$ pour tout entier naturel n et pour tout réel t positif.

b) Conclure que N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt.

4) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note S_n la variable aléatoire égale à l'instant où survient le n-ième appel.

a) Comparer, pour tout réel t positif, les événements $(S_1 > t)$ et $(N_t = 0)$ puis reconnaître la loi de S_1.

b) Comparer, pour tout réel t positif, les événements : $(S_n > t)$ et $(N_t \leq n-1)$.

c) Montrer que S_n est une variable à densité dont une densité est la fonction f_n définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t \leq 0 \end{cases}$$

5) Soit (t, u) un couple de réels positifs tels que $u < t$.

a) Justifier sans calcul que les variables aléatoires N_u et $N_t - N_u$ sont indépendantes.

b) Établir l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(N_t = n) = \sum_{i=0}^{n} P(N_u = i) P(N_t - N_u = n - i)$.

c) En déduire la valeur de $P(N_t - N_u = 0)$ puis celle de $P(N_t - N_u = 1)$.

d) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(N_t - N_u = n) = \dfrac{[\lambda(t-u)]^n}{n!} e^{-\lambda(t-u)}$.

6) On pose, pour tout ω de Ω, $R_t(\omega) = \begin{cases} S_{N_t(\omega)}(\omega) \text{ si } N_t(\omega) \geq 1 \\ 0 \text{ si } N_t(\omega) = 0 \end{cases}$ et on admet que R_t est une variable aléatoire.

a) Décrire ce que représente la variable aléatoire R_t.

b) Utiliser le système complet d'événements $(N_t = n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour montrer que :

$$\forall t > 0, \ \forall u \in [0, t], \ P(R_t > u) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([S_n > u] \cap [N_t = n])$$

c) Utiliser la question 4b) pour établir la relation :

$$\forall t > 0, \ \forall u \in [0, t], \ P(R_t > u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} P([N_u = i] \cap [N_t - N_u = n - i])$$

d) Montrer enfin que la fonction de répartition de R_t est la fonction F_t définie par :

$$F_t(u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u < 0 \\ e^{-\lambda(t-u)} \text{ si } 0 \leq u \leq t \\ 1 \text{ si } u > t \end{cases}$$

e) La variable R_t est-elle à densité ? Est-elle discrète ?