ecricome

www.ecricome.org

Banque d'épreuves communes aux concours des Ecoles
escbordeaux/euromedmarseille/icnnancy/escreims/escrouen/esctoulouse

CONCOURS D'ADMISSION 2005

MATHÉMATIQUES
Option Scientifique

Lundi 2 mai 2005 de 8h00 à 12h00
Durée : 4 heures

Candidat bénéficiant de la mesure «Tiers-temps» : 8h00-13h20

Aucun document n'est autorisé. Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 6 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes - mais brèves - de leurs affirmations.

Tournez la page SVP

1. EXERCICE

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel. Trois réels a, b, c étant donnés, on pose :

$$M(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

1. Déterminer trois matrices I, J, K dont les coefficients ne dépendent pas de a, b, c, telles que :
$$M(a,b,c) = aI + bJ + cK$$
Calculer J^2, K^2 et K^3. Déterminer une relation entre I, J et K^2, ainsi qu'un polynôme annulateur de K.
Quelles sont les valeurs propres possibles de K ?

2. Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, telle que $D = ({}^tP)KP$ soit une matrice diagonale.
Déterminer P et D vérifiant les conditions précédentes et telles que $d_{11} < d_{22} < d_{33}$ (où d_{ij} est le coefficient d'indices i, j de D.)

3. En écrivant $M = M(a,b,c)$ en fonction de I, K, K^2, déterminer la matrice $({}^tP)MP$.
En déduire les valeurs propres de la matrice M.
Discuter suivant les valeurs de a, b, c le nombre de valeurs propres distinctes de M et préciser dans chaque cas les sous-espaces propres associés.

4. On suppose dans cette question $a = 4$, $b = 2$, $c = \sqrt{2}$ et on note $M = M(4, 2, \sqrt{2})$.
On pose $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = ({}^tP)\,X$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

   a. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ par :
   $$f(x,y,z) = \frac{({}^tX)\,MX}{\|X\|^2}$$

      i. Montrer que $\|X\|^2 = \|X'\|^2$ puis que
      $$f(x,y,z) = \frac{4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

   ii. Montrer que 2 et 8 sont respectivement les minimum et maximum de f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et déterminer les points en lesquels ils sont atteints.

b. On cherche désormais à résoudre l'équation $B^2 = M$ d'inconnue $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   i. Soit B une solution de l'équation (s'il en existe).
   Montrer que B et M commutent.
   En déduire que si X appartient au sous-espace propre E_λ de M attaché à la valeur propre λ, alors BX appartient aussi à E_λ.
   Montrer que les vecteurs propres de M sont également vecteurs propres de B.
   Justifier alors que $\Delta = ({}^tP)BP$ est une matrice diagonale.

   ii. Résoudre l'équation $\Delta^2 = ({}^tP)MP$ d'inconnue Δ et donner le nombre de solutions de l'équation $B^2 = M$.

2. EXERCICE.

On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 \geqslant 0 \text{ et, pour } n \geqslant 1, \quad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$$

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n \geqslant \sqrt{n}$.

2.

   a. Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}(1+x).$$

   b. En déduire que pour tout entier n, $u_n \leqslant n + \dfrac{u_0}{2^n}$ puis que la suite $(\dfrac{u_{n-1}}{n^2})_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

   c. Montrer que la suite $(\dfrac{u_n}{n})_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, puis en remarquant que, pour tout entier n non nul, $1 \leqslant \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{1 + \dfrac{u_{n-1}}{n}}$, en déduire un équivalent de u_n en $+\infty$.

3. On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$. A l'aide d'un développement limité en 0 de $\sqrt{1+x}$, montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite L que l'on précisera.

Tournez la page SVP

4. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) \quad \text{puis} \quad \lim_{n\to+\infty}(u_n - u_{n-1}).$$
Justifier alors qu'il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout entier n, si $n \geqslant N_0$ alors $u_n \geqslant u_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.
Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

5. Ecrire en langage Pascal une fonction récursive ayant pour nom **suite** qui calcule le terme d'indice n de la suite lorsque $u_0 = 1$.

3. PROBLEME.

X et Y étant deux variables aléatoires réelles, définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, admettant pour densités respectives f_X et f_Y, on rappelle que la fonction h définie par
$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,dt$$
est une densité de la variable aléatoire $X + Y$.

Partie I : Un calcul d'intégrale.

1. Déterminer pour quelles valeurs du réel α l'intégrale J_α converge où
$$J_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}.$$

2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout réel α supérieur ou égal à 1 on a :
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,dt = \frac{1}{2\alpha} J_\alpha$$
En déduire que, pour tout réel α supérieur ou égal à 1 on a :
$$J_{\alpha+1} = \frac{2\alpha - 1}{2\alpha} J_\alpha$$

3. Calculer J_1.
Pour n entier supérieur ou égal à 1, calculer J_n.

Partie II : Loi de Student à n degrés de liberté.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g_n par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) = (1 + \frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel k_n tel que la fonction $f_n = \dfrac{1}{k_n} g_n$ soit une densité de probabilité.
   Exprimer k_n à l'aide de $J_{\frac{n+1}{2}}$. (On pourra, en justifiant sa validité, utiliser le changement de variables $u = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$).

2. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densité f_n. (On dira que X suit une loi de Student à n degrés de liberté).

   a. Montrer que X admet une espérance si et seulement si $n > 1$ et la calculer dans ce cas.

   b. Montrer que X admet une variance si et seulement si $n > 2$, exprimer $V(X)$ en fonction de k_n, n et $J_{\frac{n-1}{2}}$ puis vérifier que

$$V(X) = \frac{n}{n-2}$$

Lorsque $n = 1$ la loi de Student à 1 degré de liberté s'appelle **loi de Cauchy** *et une densité sur $\mathbb{R}$ est donc :*

$$f_1 \, : \, t \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$$

Partie III : Simulation d'une loi.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, un rayon lumineux part de l'origine O et frappe un écran représenté par la droite d'équation $x = 1$, en un point M. On suppose que Θ, mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$, est une variable aléatoire de loi uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $\tan \Theta$. En déduire que $\tan \Theta$ est une variable aléatoire à densité, dont on explicitera une densité.

Tournez la page SVP

2. Exprimer Y, variable aléatoire égale à l'ordonnée du point M, en fonction de Θ. Reconnaître la loi de Y.

3. On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction **random** simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$. On considère le programme informatique suivant :

```
program simu;
var u,x:real;
begin
randomize;
u:=random;
x:=sin/cos(pi*u-pi/2);
end.
```

Quelle loi de probabilité ce programme permet-il de simuler ? Expliquer.

Partie IV : Obtention d'une loi de Cauchy à partir de lois normales.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonction de répartition F. On notera G la fonction de répartition de la variable aléatoire $|Y|$.

   a. On suppose dans cette question que Y est une variable aléatoire de densité f continue sur $\mathbb{R}$.
   Exprimer une densité de $-Y$ à l'aide de f et montrer que Y et $-Y$ ont même loi si et seulement si f est paire.
   On suppose cette condition vérifiée. Exprimer G à l'aide de F et montrer que $|Y|$ est une variable aléatoire à densité. Exprimer une densité g de $|Y|$ en fonction de f.

   b. Inversement, on suppose dans cette question que $|Y|$ est une variable aléatoire de densité g, et que Y et $-Y$ ont la même loi.
   Montrer que, pour tout réel x, $P([Y = x]) = 0$, puis exprimer $F(x)$ en fonction de $F(-x)$
   Exprimer $F(x)$ en fonction de G et de x. (on pourra distinguer deux cas : $x < 0$ et $x \geqslant 0$).
   En déduire que Y est une variable à densité et exprimer une densité f de Y en fonction de g.

2. Soit c un réel strictement positif. A l'aide du changement de variable $u = e^{2t}$, montrer que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t} e^{-\frac{ce^{2t}}{2}} dt$$

converge et la calculer.

3. Soient X et X' deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, **indépendantes**, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, de même densité φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

   a. Montrer que la variable aléatoire $Z = \ln |X|$ est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité. Quelle est une densité de la variable aléatoire $-Z$?

   b. Montrer qu'une densité h de la variable aléatoire $\ln |\frac{X}{X'}|$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \frac{2}{\pi} \frac{e^x}{e^{2x} + 1}.$$

   c. Déterminer une densité de la variable aléatoire $|\frac{X}{X'}|$ puis reconnaitre la loi de $\frac{X}{X'}$.