**Code sujet : 294**

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

**Conception : BSB Burgundy School of Business**

OPTION TECHNOLOGIQUE

# MATHÉMATIQUES

Mardi 8 mai 2018, de 8 h. à 12 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé.* ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## Exercice 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $A^2$. Vérifier que $A^2 = A + 6I$.
   b) Déterminer un polynôme annulateur de la matrice $A$.
   c) En déduire que les seules valeurs propres possibles de $A$ sont $-2$ et $3$.
2. On considère les matrices $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Vérifier que $U$ et $V$ sont des vecteurs propres de la matrice $A$ et donner leurs valeurs propres associées.
   b) Justifier que $AP = PD$. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?
3. a) Montrer que $P$ est inversible et calculer $P^{-1}$.
   b) Montrer que pour tout entier naturel $n$ on a : $A^nP = PD^n$.
   c) En déduire que pour tout entier naturel $n$ on a :

$$A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-2)^{n+1} & 2.3^{n+1} + 3.(-2)^{n+1} \\ 3^n - (-2)^n & 2.3^n + 3.(-2)^n \end{pmatrix}$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel $n$, par la relation :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n + 3$$

**Tournez la page S.V.P.**

4. Calculer $u_2$ et $u_3$.

5. On considère le programme Scilab suivant. Quelle instruction faut-il ajouter en ligne 5 pour que ce programme calcule et affiche la valeur de $u_n$, l'entier $n$ non nul étant donné par l'utilisateur ?

```
1.  n=input('n?')
2.  v=-1/2,u=1
3.  for i=2:n
4.       a=u
5.       .....
6.       v=a
7.  end
8.  disp(u)
```

On pose $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel $n$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

6. a) Montrer que pour tout entier naturel $n$ on a : $X_{n+1} = AX_n + B$.
   b) Vérifier que $AL + B = L$.
   c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ on a : $X_n = A^n(X_0 - L) + L$.
   d) Déduire des questions précédentes que pour tout entier naturel $n$ on a :

$$u_n = \frac{3}{10}(3^n - (-2)^n) - \frac{1}{2}$$

7. On considère le programme suivant. Comment faut-il compléter la ligne 5 pour que ce programme calcule et affiche la valeur de $u_n$, l'entier $n$ étant donné par l'utilisateur ?

```
1.  n=input('n?')
2.  X=[1;-1/2]
3.  A=[1,6;1,0],B=[3;0]
4.  for i=1:n
5.      X=...
6.  end
7.  disp(X(2))
```

## Exercice 2

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - 1 + x$.

1. a) Montrer que $g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
   b) Calculer $g(0)$. En déduire, pour tout réel $x$, le signe de $g(x)$ selon les valeurs de $x$.

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x+1-\frac{x}{e^x}$. On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2 cm.

2. a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b) Montrer que la droite $D$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
   c) Justifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

3. a) Montrer que la dérivée de $f$ vérifie, pour tout réel $x$, la relation : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$.
   b) Dresser le tableau des variations de $f$ en y faisant figurer les limites calculées en 2.

4. Montrer que la dérivée seconde de $f$ vérifie pour tout réel $x$ la relation : $f''(x) = \dfrac{2-x}{e^x}$.

   Etudier la convexité de $f$.

5. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et $D$.

# Exercice 3

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. Un joueur effectue trois tirages successifs d'une boule dans cette urne. Il remet la boule obtenue dans l'urne après chaque tirage.

A partir du deuxième tirage, le joueur reçoit un point à chaque fois que la couleur obtenue à un tirage n'est pas celle qui a été obtenue au tirage précédent. Dans le cas contraire il ne reçoit aucun point.

Ainsi, si les trois tirages successifs amènent : *blanc, rouge, rouge* le joueur marque un point au deuxième tirage et aucun au troisième tirage.

On introduit, pour tout entier $k$ compris entre 1 et 3 les événements $B_k$ : « obtenir une boule blanche au $k$-ème tirage » et $R_k$ : « obtenir une boule rouge au $k$-ème tirage ».

1. Soit $X_2$ la variable aléatoire de Bernoulli égale au gain du joueur lors du deuxième tirage. C'est à dire que $X_2$ est égal à 1 si le joueur marque un point lors du deuxième tirage et que $X_2$ est égal à 0 sinon.

   a) Justifier que $(X_2 = 1) = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)$. Calculer $P(X_2 = 1)$.

   b) Donner $E(X_2)$ et $V(X_2)$.

2. Soit $X_3$ la variable aléatoire de Bernoulli égale au gain du joueur lors du troisième tirage.

   a) Justifier que $X_3$ suit la même loi que $X_2$.

   b) Soit $G$ la variable aléatoire égale au nombre total de points marqués lors des trois tirages. Exprimer $G$ en fonction de $X_2$ et $X_3$. En déduire $E(G)$.

3. a) Exprimer l'événement $(X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)$ en fonction de $B_1, B_2, B_3$ et $R_1, R_2, R_3$. En déduire que $P((X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) = \dfrac{2}{9}$.

   b) Compléter de la même manière le tableau suivant donnant la loi conjointe du couple $(X_2, X_3)$.

| $X_2$ \ $X_3$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | ... | ... |
| 1 | .... | $\frac{2}{9}$ |

   En déduire que $\mathrm{cov}(X_2, X_3) = \dfrac{2}{81}$.

4. Calculer $V(G)$.

5. On suppose à présent que le joueur effectue $n$ tirages successifs, $n$ étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. Il remet toujours la boule obtenue dans l'urne après chaque tirage. Les règles du jeu restent inchangées et on continue à noter $G$ le nombre total de points marqués lors de ces $n$ tirages.

   a) Expliquer avec précision pourquoi l'instruction :

   ```
   X=grand(1,n,'bin',1,1/3)
   ```

   permet de simuler $n$ tirages dans l'urne.

   b) Quelle instruction faut-il ajouter à la ligne 6 pour que le programme suivant simule $n$ tirages successifs dans l'urne (l'entier $n \geq 2$ étant donné par l'utilisateur) et qu'il affiche le nombre de points marqués par le joueur ? On justifiera la réponse.

```
1.  n=input('n ?')
2.  X=grand(1,n,'bin',1,1/3)
3.  G=0
4.  for i=2:n
5.       if X(i)<>X(i-1) then
6.           .....
7.       end
8.  end
9.  disp(G)
```



**Tournez la page S.V.P.**

# Exercice 4

Dans tout l'exercice $a$ est un réel strictement positif.

1. Montrer que les intégrales
$$I = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt \ ; \ J = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^3}dt \text{ et } K = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^4}dt$$
sont convergentes et vérifier que $I = \frac{1}{a}$, $J = \frac{1}{2a^2}$ et $K = \frac{1}{3a^3}$.

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(t) = 0 \text{ si } t < a \text{ et } f(t) = \frac{3a^3}{t^4} \text{ si } t \geq a$$

2. Montrer en utilisant un des calculs de la question 1 que $f$ peut être considérée comme une densité de probabilité.

Un fabriquant de téléphone portable veut étudier l'autonomie de ses téléphones. Étant donné un téléphone pris au hasard chargé au maximum, on note $X$ le nombre d'heures écoulées lorsque le téléphone s'éteint. On admet que $X$ est une variable aléatoire de densité $f$.

3. Montrer en utilisant certains calculs de la question 1 que $X$ admet une espérance et une variance et vérifier que l'on a : $E(X) = \frac{3a}{2}$ et $V(X) = \frac{3a^2}{4}$.
4. On note $F$ la fonction de répartition de $X$.
   a) Calculer $F(x)$ lorsque $x < a$.
   b) Justifier que $F(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^3$ lorsque $x \geq a$.
   c) Vérifier que $P(2a \leq X \leq 4a) = \frac{7}{64}$ et que $P(X \geq 2a) = \frac{1}{8}$.
   Calculer $P_{(X \geq 2a)}(X \leq 4a)$.
5. On cherche à estimer le paramètre $a$. Pour cela on allume en même temps $n$ téléphones pris au hasard que l'on a chargés au maximum, $n$ étant un entier naturel non nul. On note pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n$, $X_i$ la durée en heure écoulée lorsque le $i$-ème téléphone s'éteint. On suppose que les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes.
   On pose : $M_n = \frac{2}{3n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
   a) Calculer $E(M_n)$ et $V(M_n)$.
   b) Montrer que $M_n$ est un estimateur sans biais de $a$. Calculer son risque quadratique.
   c) Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. Montrer en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev que :
   $$P(|M_n - a| > \varepsilon) \leq \frac{a^2}{3n\varepsilon^2}$$
   d) Soit $\alpha$ un réel de $]0,1[$ et $\varepsilon = \frac{a}{\sqrt{3\alpha n}}$. Montrer que $[M_n - \varepsilon; M_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance de $a$ au niveau de confiance $1 - \alpha$.
   e) Le fabriquant teste au hasard 100 téléphones. Il remarque que la somme $\sum_{i=1}^{100} X_i$ est égale à 603. À quelle valeur peut-il estimer $a$ ?

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1173 – D'après documents fournis