BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2011

Code épreuve :

294

Conception : E.S.C. CHAMBERY

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES

Mardi 10 mai 2011, de 14 h. à 18 h.

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On note : $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer par la méthode du pivot de Gauss que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Vérifier que $M = PDP^{-1}$.

Un centre de vacances étudie le comportement d'un client qui a le choix chaque jour entre trois activités qui seront appelées **A** , **B** et **C**.

On considère que si le jour n le client a choisi une activité , il en change systématiquement le lendemain et choisit de manière équiprobable entre les deux autres activités .

Le premier jour (c'est-à-dire le jour 1) , le client choisit l'activité **B**.

On notera A_n (respectivement B_n , C_n) l'événement: " le client choisit l'activité **A** le jour n " (respectivement **B** , **C**) et on notera a_n (respectivement b_n , c_n) sa probabilité .

On définit également la matrice U_n par : $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, ainsi $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) Par une formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier naturel n non nul : $U_{n+1} = MU_n$.
   (b) En utilisant la relation établie en 1.(b) , en déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul : $U_n = \frac{1}{3} P\, D^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul , $\begin{cases} a_n = c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1} \\ b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1} \end{cases}$.

EXERCICE 2

Dans tous les calculs et expressions , la lettre " e " désigne l'exponentielle de 1 . *On donne* $e \approx 2{,}7$.

1. (a) Montrer que pour tout réel x , $x^2 - x.e + e > 0$.
   (b) On note pour tout réel x , $P(x) = 2x^2 - (2e).x + e^2 - 2e$.

   Calculer les racines de P , notées α et β , et en déduire le signe de $P(x)$ en fonction des différentes valeurs de x .

On considère alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \ln(x^2 - x.e + e)$.
On admettra sans le justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

2. (a) Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(e-1)$ et $f(e)$. Vérifier que $f(\frac{e}{2}) = -\ln(1 - \frac{e}{4})$.
Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

(b) Calculer $f'(x)$, puis étudier son signe . Vérifier que $f'(0) = 1$ et $f'(e) = -1$.

(c) En utilisant $e \approx 2{,}7$, ordonner les nombres 0 , 1 , $e-1$, e , $\frac{e}{2}$ puis dresser le tableau des variations de f en faisant figurer les valeurs étudiées en 2.(a) .

3. Vérifier que $f''(x) = \dfrac{P(x)}{(x^2 - x.e + e)^2}$ et en déduire grâce au 1.(b) les points d'inflexion de C_f .

4. Donner l'allure de C_f dans un repère orthonormé d'unité 5 cm , en faisant figurer les résultats obtenus aux questions précédentes . (On donne $f(\frac{e}{2}) \approx 1{,}1$; $\alpha \approx 0{,}4$; $\beta \approx 2{,}3$).

EXERCICE 3

Un opérateur téléphonique propose trois forfaits : Le forfait n°1 coûte 10 € par mois
Le forfait n°2 coûte 20 € par mois
Le forfait n°3 coûte 30 € par mois .

Un groupe de n clients se rend dans une boutique de cet opérateur et chacun achète un de ces trois forfaits au hasard , avec équiprobabilité et sans être influencé par les choix des autres clients .

On note les variables aléatoires :

X_1 , égale au nombre de clients parmi ces n clients ayant choisi le forfait n°1
X_2 , égale au nombre de clients parmi ces n clients ayant choisi le forfait n°2
X_3 , égale au nombre de clients parmi ces n clients ayant choisi le forfait n°3 .
H , somme globale mensuelle en euros versée par ces n clients à l'opérateur .

1. (a) Justifier que X_1 suit une loi usuelle que l'on détaillera , en précisant $X_1(\Omega)$ et l'expression de $P(X_1 = k)$ pour tout entier $k \in X_1(\Omega)$.

(b) Donner les valeurs de l'espérance $E(X_1)$ et de la variance $V(X_1)$.

(c) Justifier que les variables X_2 et X_3 suivent la même loi que X_1.

2. (a) Justifier que $X_1 + X_2 = n - X_3$ et en déduire la variance de $X_1 + X_2$.

(b) En déduire $\mathrm{cov}(X_1 , X_2) = -\frac{n}{9}$. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

3. Exprimer H en fonction des variables X_1 , X_2 et X_3 puis montrer que $E(H) = 20\,n$.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.

1. (a) En séparant les cas $x < 0$ et $x \geq 0$, calculer l'expression $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

   (b) De quelle loi usuelle reconnaît-on la fonction de répartition et la densité ?

On considère dès lors une variable aléatoire X de fonction de répartition F et de densité f , et on définit la variable aléatoire Y par la relation : $Y = \frac{1}{2} X$.

2. (a) Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$. En déduire $E(Y)$ et $V(Y)$.

   (b) Montrer que Y admet pour fonction de répartition la fonction G donnée par :

   $$G(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-2y} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}.$$

   (c) En déduire que Y suit une loi usuelle et en donner une densité g .

Dans toute la suite de l'exercice la fonction g désigne la densité usuelle de Y.

3. Dans le cadre du suivi des coupures d'électricité dans une ville donnée, on s'intéresse à la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = 2f(t) - g(t)$.

   (a) Vérifier que $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.

   (b) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$ et positive sur $\mathbb{R}$.

   (c) Montrer que h est une densité .

On considère alors une variable aléatoire Z de densité h , modélisant le temps d'attente en heures après une coupure d'électricité jusqu'à rétablissement du courant.

4. (a) Montrer que $E(Z) = 2E(X) - E(Y)$.

   En déduire le temps moyen s'écoulant avant le rétablissement du courant .

   (b) Calculer l'intégrale $\int_{0}^{\ln 2} e^{-t} - e^{-2t} \, dt$ et en déduire que $P(Z \leq \ln 2) = \frac{1}{4}$.