

Epreuve de Mathématiques ESC - Voie T

ANNEE 2012

I. Le sujet

Le sujet proposé aux candidats était constitué de 4 exercices recouvrant une très large partie du programme des deux années.

- **Exercice 1. Algèbre.** Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 par le calcul de puissances de matrices.
- **Exercice 2. Analyse.** Étude d'une fonction puis d'une suite associée par utilisation de l'inégalité des accroissements finis.
- **Exercice 3. Probabilités discrètes.** Comparaison de stratégies de réponses à un QCM selon les méthodes de notation.
- **Exercice 4. Probabilités.** Étude de deux variables aléatoires à densité.

Le sujet avait pour objectif de valoriser les étudiants ayant travaillé avec sérieux et ayant fait un effort de compréhension des démarches mathématiques mises en œuvre pendant leurs deux années de préparation.

II. Traitement du sujet par les candidats

Exercice 1 (4,8 points sur 20) *représente 27% des points acquis par les candidats.*

Les étudiants ont souvent été déstabilisés par la similitude entre les notations (u_n le réel, U_n la matrice colonne).

Les bases du calcul matriciel sont maîtrisées par presque tous les candidats. La récurrence amenant $U_n = A^n U_0$ est aussi le plus souvent bien traitée. Plus généralement, on peut noter que le principe de récurrence est bien compris par une grande partie des candidats.

Il est en revanche regrettable que les étudiants ne fassent une récurrence que lorsque l'énoncé le demande (dans la question 2.b : « montrer que $A^n P = P T^n$ », la récurrence était pourtant à la fois naturelle et classique).

La formule du binôme n'est que trop rarement maîtrisée par les candidats : ils ne vérifient pas que les matrices commutent, les bornes sont souvent fausses, les manipulations de puissances sont hasardeuses. La situation envisagée était pourtant simple et avait certainement été traitée par les candidats pendant leur scolarité.

Pour le calcul de l'inverse, très peu de candidats ont pensé à simplement vérifier que le produit de P avec la matrice proposée était égal à la matrice identité. Les autres ont utilisé la méthode du pivot, le plus souvent avec réussite. En revanche trop peu de candidats pensent à justifier rigoureusement l'inversibilité.

Les dernières questions nécessitant une certaine aisance dans les calculs de puissances ont joué leur rôle en favorisant les candidats rigoureux.

Rappelons enfin aux professeurs que la notation C_n^p ne devrait plus être rencontrée. On rappelle également que le calcul de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2 par le déterminant est hors programme, cette méthode ne peut donc être acceptée.

Exercice 2 (6,4 points sur 20) *représente 32% des points acquis par les candidats.*

Partie I

La première partie consistait en l'étude de la fonction f définie par $f(x)=x-e^{-x}-1$.

On remarque encore chez beaucoup de candidats de grandes difficultés à calculer une limite sans erreurs et avec des justifications rigoureuses. La notion d'asymptote est souvent mal maîtrisée. On aimerait également que les candidats prennent garde à la cohérence entre leur tableau de variation et les limites obtenues.

Ensuite, la rédaction proposée pour justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution n'est pas toujours suffisante. En particulier, l'argument de la continuité est trop rarement cité.

Les correcteurs ont trop peu eu l'occasion de voir des représentations graphiques et celles qu'ils ont vues étaient bien souvent farfelues.

Partie II

La deuxième partie permettait d'étudier une suite (u_n) en utilisant l'inégalité des accroissements finis.

On a pu remarquer chez beaucoup de candidats de grandes difficultés à manipuler les valeurs absolues. Par contre, comme dans l'exercice 1, les étudiants réussissent le plus souvent la démonstration par récurrence du 3.b).

Dans la suite on utilisait l'inégalité des accroissements finis. Très peu de candidats ont réussi à énoncer correctement ce théorème. Son application manque alors bien sûr de rigueur.

Les dernières questions sont rarement abordées. C'est assez surprenant pour un enchaînement classique de questions et un type de problème sans doute souvent rencontré par les candidats durant leur formation.

Exercice 3 (3,6 points sur 20) *représente 17% des points acquis par les candidats.*

Dans cet exercice on supposait que deux étudiants répondaient à un QCM. Le premier répondait au hasard aux questions qu'il ne savait pas résoudre tandis que le deuxième ne répondait pas à ce type de questions.

L'application de la formule des probabilités totales est faite par moins de la moitié des candidats et quand c'est le cas elle n'est pas toujours rigoureuse

La loi binomiale de la question 2 est le plus souvent bien reconnue. Par contre, beaucoup de candidats se trompent sur le paramètre ($\frac{6}{10}$ au lieu de $\frac{11}{15}$), ce qui montre qu'ils n'ont pas compris correctement l'expérience.

La formule $N=3X-40$ a donné lieu à beaucoup de justifications farfelues mais rarement à la formule $N=X-2(20-X)$. Cela démontre une vraie difficulté pour les candidats à développer une argumentation indépendante du résultat qu'ils cherchent à obtenir. Les cas de bluff sont nombreux sur cette question. On imagine l'impression déplorable que ce type de comportement peut laisser au correcteur.

La formule $E(aX+b)=aE(X)+b$ est le plus souvent connue et appliquée. La formule $V(aX+b)=a^2V(X)$ l'est beaucoup moins.

L'étude du second cas amène les mêmes erreurs. La comparaison finale entre les deux élèves est trop souvent basée sur l'intuition.

Enfin, on rappelle aux professeurs que la notation $P(A/B)$ ne devrait plus apparaître dans les copies.

Exercice 4 (5,2 points sur 20) *représente 24% des points acquis par les candidats.*

Partie I

La définition d'une densité de probabilité est connue de la plupart des candidats. Mais le manque de rigueur dans la rédaction est trop fréquent. En particulier la positivité et la continuité de f ne sont que rarement justifiées. On rencontre les mêmes difficultés sur la fonction de répartition.

Le lien entre les probabilités demandées dans la question 3 et la fonction de répartition est souvent connu des candidats, mais que d'erreurs de calcul !

Comme pour la densité et la fonction de répartition, la formule donnant l'espérance d'une variable aléatoire à densité est le plus souvent connue. Mais cela ne peut suffire. Le calcul de cette espérance, utilisant la relation de Chasles est très souvent bâclé.

Partie II

Les problèmes sont les mêmes que dans la partie I. Le calcul intégral constitue une grande difficulté pour beaucoup de candidats. Encore plus dans cette partie qui utilise la fonction exponentielle.

La loi exponentielle est souvent reconnue. Les correcteurs ont été étonnés de voir très souvent des candidats redémontrer que g était une variable à densité par la même méthode que dans la partie I. Dans le même registre, que dire des candidats (nombreux) qui n'ont pas su donner le lien entre Z , X et Y ($Z=X+Y$) alors qu'il était donné en préambule de l'exercice ?

III. Notes moyennes obtenues

Ex1	Ex2	Ex3	Ex4	Total
2,69	3,18	1,66	2,32	9,85

Sur l'ensemble des 894 copies, on peut remarquer une très grande hétérogénéité des prestations avec des copies remarquables (plusieurs dizaines d'étudiants obtiennent la note maximale de 20) mais aussi un grand nombre de notes inférieures à 2. L'écart type est de 6,20 pour une moyenne de 9,85.

IV. Conseils aux futurs candidats

Même s'il reste trop de copies très mal rédigées (ratures, fautes d'orthographe, absence de conclusion, etc.), la majorité des étudiants fait un réel effort de présentation.

Les qualités de rigueur sont hélas moins répandues. Les difficultés que les correcteurs ont le plus rencontrées sont les suivantes :

- méconnaissance du cours ;
- manque de rigueur dans la conduite des raisonnements ;
- manque de maîtrise de certains points fondamentaux du cours (calculs de limites, formule du binôme, inégalité des accroissements finis, densité de probabilité) ;
- tendance à réciter des séquences de cours sans les comprendre et sans voir le lien avec l'exercice posé.

Enfin, même si cela concerne peu de copies, les correcteurs ont été amenés à sanctionner des cas trop fréquents de bluff, le candidat voulant à tout prix arriver au résultat énoncé, quitte à faire un raisonnement notoirement faux.

L'épreuve ESC est conçue pour les étudiants sérieux qui ont travaillé avec régularité tout au long de leurs deux années de préparation. Les exercices sont souvent proches de ceux que les candidats n'auront pas manqué de rencontrer avec leur professeur. On attend des candidats qu'ils soient capables de citer avec précision les théorèmes qu'ils utilisent et d'en citer les hypothèses.

Il est donc conseillé aux étudiants de connaître parfaitement les énoncés des théorèmes fondamentaux et de s'entraîner sur les exercices qu'ils auront rencontrés durant leurs deux années de préparation. Ils sauront ainsi s'adapter aux exercices de cette épreuve en apportant la rigueur nécessaire dans les solutions et en respectant les notations qu'ils ont rencontrées tout au long de l'année.

Le jour de l'épreuve, on invite les candidats à lire en entier l'énoncé de chacun des exercices avant de commencer à les résoudre. Cela permet d'en comprendre la logique et d'éviter ainsi peut-être de réciter des séquences type sans les comprendre.