Code épreuve : 294

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Conception : E.S.C. CHAMBERY

MATHEMATIQUES

OPTION TECHNOLOGIQUE

N.B.
Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ ainsi que la relation :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

Soit les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. a) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$.
   b) Etablir, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
   a) Vérifier que $AP = PT$.
   b) Etablir que pour tout entier naturel n, $A^n P = PT^n$.

3. On pose $B = T - \frac{1}{2}I$.
   a) Donner les quatre coefficients de B puis calculer B^2.
   Donner B^k pour tout entier $k \geq 2$.
   b) En utilisant la formule du binôme, montrer que : $\forall n \geq 1,\ T^n = \dfrac{1}{2^n}I + \dfrac{n}{2^{n-1}}B$.
   Cette formule est-elle aussi vraie pour $n = 0$?
   c) En déduire, pour tout entier naturel n, les quatre coefficients de T^n.

4. a) Justifier que P est inversible et vérifier que : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.
   b) Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, les quatre coefficients de A^n.

5. Déterminer, pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 2

Partie I - Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x} - 1$ et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1. a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   b) Etablir que $\mathcal{C}$ admet une droite asymptote D au voisinage de $+\infty$ et préciser une équation de D.
   c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Que pouvez-vous en déduire sur la courbe C ?

2. Etudier le sens de variation de f et dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

3. a) Etablir que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée α.
   b) Justifier que $\alpha \in [1, 2]$. *On pourra utiliser les valeurs approchées :* $e^{-1} \simeq 0,4$ *et* $e^{-2} \simeq 0,1$.

4. Tracer l'allure de C et de D en faisant figurer le réel α. *On pourra utiliser la valeur approchée* $\alpha \simeq 1,3$.

Partie II - Approximation de α

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-x} + 1$. On définit également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = h(u_n)$.

1. Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet comme unique solution sur $\mathbb{R}$ le réel α défini en I.3.

2. Montrer que pour tout réel x de $[1, 2]$, $-\dfrac{1}{e} \leq h'(x) < 0$.

   En déduire que, pour tout réel x de $[1, 2]$, $|h'(x)| \leq \dfrac{1}{e}$.

3. a) Montrer que h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

   b) Prouver par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 2$.

   On pourra utiliser les valeurs approchées suivantes : $h(1) \simeq 1,4$ *et* $h(2) \simeq 1,1$.

4. a) Enoncer avec précision le théorème de l'inégalité des accroissements finis.

   b) Etablir que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{e}|u_n - \alpha|$.

   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{e^n}$.

5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 3

Un professeur interroge ses élèves en posant une liste de vingt questions. Pour chaque question, il y a trois réponses possibles, une seule étant la bonne réponse. L'élève A répond au questionnaire. On suppose que :

- L'élève A ne connaît que 60% de son cours. C'est-à-dire que pour chaque question la probabilité qu'il connaisse la réponse est $\dfrac{60}{100}$.
- Lorsqu'il ne connaît pas une réponse à une question, il répond au hasard.
- Les questions posées sont mutuellement indépendantes.

On considère les événements

- R : « l'élève A connaît la réponse à la première question ».
- J : « l'élève A répond juste à la première question ».

1. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que $P(J) = \dfrac{11}{15}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses exactes données par l'élève A aux vingt questions.

2. Reconnaître la loi de X. On donnera les valeurs prises par X et pour chacune de ces valeurs k la valeur de $P(X = k)$.

3. Donner $E(X)$ et $V(X)$, l'espérance et la variance de X.

4. Pour sanctionner les choix faits au hasard, le professeur décide d'accorder un point par réponse exacte et de retirer deux points par réponse fausse.

   Soit N la variable aléatoire égale à la note obtenue par l'élève A.

a) Justifier l'égalité : $N = 3X - 40$.

b) En déduire l'espérance de N ainsi que sa variance.

L'élève B répond lui aussi au questionnaire. On suppose que comme l'élève A, il ne connaît que 60% de son cours. Mais il choisit de ne répondre qu'aux questions dont il connaît la réponse.

5. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses de l'élève B.

   a) Déterminer la loi de Y.

   b) En déduire la note que l'élève B obtient en moyenne.

   c) En moyenne, entre l'élève A et l'élève B quelle est la meilleure stratégie pour obtenir une bonne note ?

Exercice 4

Dans cet exercice, on s'intéresse à la durée de vie d'un composant électronique comme somme de son temps de stockage noté X et de son temps de fonctionnement noté Y.

Partie I

On considère un composant électronique pour lequel le temps écoulé (en années) entre la fin de son processus de fabrication et sa première utilisation est une variable aléatoire X de densité f donnée par :

$$\begin{cases} f(t) = 1 - \frac{1}{2}t & \text{si } t \in [0, 2] \\ f(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

2. Soit F la fonction de répartition de X. Calculer $F(x)$ en distinguant les cas : $x < 0$, $0 \leq x \leq 2$ et $x > 2$.

3. Calculer les probabilités suivantes : $P(X \geq 1)$, $P\left(1 \leq X \leq \frac{3}{2}\right)$ et $P_{(X\geq 1)}\left(X \leq \frac{3}{2}\right)$.

4. Montrer que $E(X) = \frac{2}{3}$.

Partie II

On admet que la durée de vie en années du composant électronique à partir de sa première utilisation est une variable aléatoire Y de densité g donnée par :

$$\begin{cases} g(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ g(t) = \frac{2}{5}e^{-\frac{2}{5}t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. a) Calculer pour tout réel x positif, $\int_0^x g(t)dt$.

   b) En déduire la fonction de répartition G de Y.

2. Justifier que g est une densité de probabilité d'une loi usuelle. Préciser le paramètre de cette loi.

   Calculer l'espérance de Y.

3. Le composant électronique est garanti pendant 2 ans à partir de sa première utilisation. Quelle est la probabilité qu'il dure au-delà de la garantie ?

4. Soit Z la variable aléatoire égale au temps en années écoulé entre la fin de fabrication du composant et sa fin de vie.

   a) Exprimer Z en fonction de X et de Y.

   b) En déduire le temps moyen écoulé entre la fin de fabrication du composant et sa fin de vie.