MATHÉMATIQUES I, session 2014

Option Scientifique

École conceptrice : EMLYON

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants.

Le problème 1 porte sur l'analyse et les probabilités : fonctions, intégration, intégrales impropres, dérivations, extremums des fonctions réelles de deux variables réelles, densité.
Le problème 2 porte sur l'algèbre linéaire : matrices, endomorphismes, diagonalisabilité, matrices symétriques, produit scalaire.

Problème 1

Partie I

La partie I étudie les propriétés générales de T : T est un endomorphisme de E, T n'est pas surjectif, T conserve la parité, lien avec une convergence d'intégrale impropre.

1. Dans la plupart des copies, la résolution de cette question n'est pas claire et nette.
Il y a souvent confusion entre T, $T(f)$, $T(f)(x)$ et, d'autre part, la définition de la classe C^1 n'est pas toujours connue.
Trop de candidat(e)s croient, à tort, que $T(f)$ est une primitive de f.
Rappelons que, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, alors la fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur I et est une primitive de f sur I, c'est-à-dire que $F' = f$.

2. Question en général correctement traitée, bien que, dans certaines copies, il y ait confusion entre T, $T(f)$, $T(f)(x)$.
Les correcteurs ont rencontré l'écriture fausse $T(f(x))$, au lieu de l'écriture correcte $T(f)(x)$.

3. La définition de la surjectivité n'est pas connue dans la majorité des copies.
Il y a confusion entre application (tout court) et application surjective, entre application injective et application surjective, entre antécédent et image d'un élément.
Quelques copies invoquent un argument de dimension finie, qui est ici hors de propos.
Rappelons que, si $f : E \longrightarrow F$ est une application, on dit que f est surjective si et seulement si tout élément de F admet un antécédent dans E par f, c'est-à-dire :

$$\forall\, y \in F,\ \exists\, x \in E,\ \ y = f(x).$$

4. Des candidat(e)s confondent $T(f)(-x)$ et $T(-f)(x)$.
Rappelons que, pour $f \in E$ donnée, $T(f)$ est paire si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ T(f)(-x) = T(f)(x).$$

Une résolution correcte de cette question nécessite le changement de variable $u = -t$ dans une intégrale.

5. Certain(e)s candidat(e)s, croyant à un lien logique avec la question précédente, séparent en deux cas, paire/impaire, en oubliant qu'une fonction n'est, en général, ni paire ni impaire.

Il s'agit ici d'utiliser la notion d'intégrale impropre convergente.

Les correcteurs ont rencontré beaucoup de raisonnements faux ou de calculs sur des limites dont l'existence n'a pas été assurée.

Rappelons que, lorsqu'une intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, cela n'entraîne pas que $f(t)$ tende vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

L'intégrale $\displaystyle\int_{+\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, apparue dans des copies, n'a pas de sens.

6. Dans le calcul d'intégrale, il y a ici souvent oubli d'un facteur π ou d'un facteur $\dfrac{1}{\pi}$.

Rappelons qu'une primitive de $t \longmapsto \sin(\pi t)$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $t \longmapsto \dfrac{-\cos(\pi t)}{\pi}$.

La plupart des copies terminent le calcul sur une expression non simplifiée, ce qui ne permet pas de traiter la deuxième partie de la question.

Peu de candidat(e)s savent que $\sin\pi = 0$ et que $\cos\pi = -1$.

Trop de candidat(e)s ignorent que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \cos(x+\pi) = -\cos(x)$.

Souvent, la deuxième partie de la question n'est pas comprise et il y a confusion entre T est injectif et $T(s)$ est injectif, ou confusion entre $s \neq 0$ et : $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad s(x) \neq 0$.

Partie II

La partie II étudie un premier exemple, pour $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto \mathrm{e}^{\,at}$.

7. L'oubli du cas $a = 0$ est très fréquent, mais heureusement souvent récupéré à la question suivante.

Quelques grossières erreurs de calcul sur les exponentielles.

8. Question correctement traitée dans la plupart des copies, avec quelquefois l'oubli du cas $a = 0$.

Des copies contiennent une confusion entre f_a et $f_a(1)$.

9. Il y a beaucoup d'erreurs et d'imprécisions dans les réponses à cette longue question.

Pour la dérivabilité de φ et le calcul de $\varphi'(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, il y a quelquefois encore oubli du cas $a = 0$, mais surtout il y a trop souvent l'erreur grossière : $\varphi(0) = 1$ est une constante, donc $\varphi'(0) = 0$, ce qui a fortement déçu les correcteurs.

L'étude de la dérivabilité de φ en 0 et le calcul de $\varphi'(0)$ peuvent être réalisés soit en utilisant la définition d'une dérivée, soit en utilisant le théorème limite de la dérivée, mais, dans ce dernier cas, il ne fallait pas oublier de montrer que φ est continue en 0.

La relation $\varphi(a) = \dfrac{T(f_a)}{f_a}$ n'est d'aucune utilité pour étudier la dérivabilité de φ.

Le signe de $\mathrm{e}^{\,a}(a-1) + \mathrm{e}^{\,-a}(a+1)$ a été souvent obtenu par des raisonnements ou calculs faux, aboutissant miraculeusement au résultat voulu, ce dont les correcteurs n'ont pas été dupes. Une résolution correcte peut être obtenue en étudiant les variations d'une fonction.

L'allure de la courbe représentative de φ a été rarement obtenue.

10. Les solutions proposées ici sont souvent incomplètes, bien que l'idée y soit. Il fallait citer précisément le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème de la bijection monotone.

Partie III

La partie III étudie un deuxième exemple, $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \dfrac{1}{|t|+1}$.

11. Cette question difficile et assez calculatoire, a été un écueil pour beaucoup de candidat(e)s.

La majorité des candidat(e)s croit, à tort, qu'une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{|t|+1}$ est $t \longmapsto \ln(|t|+1)$, par simple déplacement visuel de la valeur absolue, ce qui est faux.

Une résolution correcte de cette question nécessitait la séparation en cas selon la position de x par rapport à -1, 0, 1, avec idéalement une remarque préalable de parité.

Il y a eu souvent une erreur de signe pour primitiver $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ sur $]1\,;+\infty[$, ce qui donne $x \longmapsto -\ln(1-x)$ (correct) et non $x \longmapsto \ln(1-x)$ (incorrect).

Les correcteurs ont été surpris par la fréquence dans les copies d'écritures de logarithmes de nombres négatifs ou nuls, par exemple $\ln x$ pour $x < 0$, ce qui n'existe pas.

12. Question rarement résolue, car elle nécessite, en partie, la réponse à la question précédente.

Les équations demandées, pour les tangentes, ne sont quasiment jamais obtenues, et la courbe représentative de $T(h)$ est absente de presque toutes les copies.

13. Question souvent non abordée et, quand elle est traitée, elle est comprise, avec cependant quelquefois l'oubli de la positivité dans l'application d'un théorème de comparaison en vue d'obtenir la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|t|+1}\,\mathrm{d}t$.

Partie IV

La partie IV étudie les extremums éventuels d'une fonction réelle de deux variables réelles issue de la partie III.

14. Il y a trop de confusions entre F, $F(x)$, $F(y)$, $F(xy)$.

On voit dans certaines copies une confusion entre fonction et nombre, avec des affirmations du genre : $F(x)$ est de classe C^1.

Il y a presque toujours oubli de montrer $xy \in]1\,;+\infty[$.

Beaucoup d'erreurs dans le calcul des dérivées partielles premières, en particulier pour la fonction $(x,y) \longmapsto F(xy)$.

15. La définition d'un point critique est en général connue.

Cette question n'est presque jamais résolue. Ayant commencé par l'écriture d'un système de deux équations à deux inconnues, le calcul s'arrête inabouti au bout de quelques lignes, ou bien le calcul continue de façon incorrecte par l'intervention miraculeuse de l'égalité $x = y$.

16. Certaines copies confondent r, s, t.

Il y a souvent manque de connaissance du cours sur cette question.

De nombreuses erreurs de calcul numérique sur $s^2 - rt$, avec les valeurs données par l'énoncé pour r, s, t.

Rappelons qu'une inégalité stricte sur $s^2 - rt$ est nécessaire pour appliquer le théorème du cours.

La plupart des candidat(e)s ne font pas la différence entre l'étude au point (x_0, y_0) et l'étude sur $]1\,;+\infty[^2$, et oublient de citer le théorème du cours reliant extremum local et point critique.

Partie V

La partie V montre que la transformée par T d'une densité est encore une densité.

17. Question assez difficile et à l'écriture massive, rarement abordée. Lorsque la question est abordée, la résolution est correcte.

18. Question correctement résolue dans une minorité de copies, souvent en admettant le résultat de la question précédente.

19. Question qui, quand elle a été abordée, a été souvent trop rapidement résolue, les candidat(e)s étant probablement pressé(e)s par le temps.
La définition d'une densité est en général connue, mais il y a quelquefois oubli de la positivité ou d'une continuité.

Problème 2

Partie I

La partie I étudie quelques généralités : Φ_A est un endomorphisme non surjectif de E.

1. Question très facile, presque toujours abordée et réussie.

2. Quelques grossières erreurs pour le calcul de $\Phi_A(\mathrm{I}_n)$.
Des candidat(e)s ignorent que, pour tout $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on a $M\mathrm{I}_n = M$ et $\mathrm{I}_n M = M$.
Les définitions de l'injectivité et de la surjectivité ne sont pas assez bien connues.
Le lien entre $\Phi_A(\mathrm{I}_n) = 0$ et la non-injectivité de Φ_A n'est pas toujours perçu.
Il y a quelquefois oubli de la dimension finie, pour relier injectivité et surjectivité de Φ_A.

Partie II

La partie II traite d'un cas particulier à l'ordre 2 et est très élémentaire.

3. Il y a trop souvent confusion entre diagonalisable et inversible. L'erreur "A est triangulaire et n'a pas de 0 sur la diagonale, donc A est diagonalisable" a été trop souvent vue.
Rappelons qu'il n'y a pas de lien logique entre diagonalisabilité et inversibilité, comme le montrent les quatre exemples suivant, à l'ordre 2 :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et est inversible,

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et n'est pas inversible,

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable et est inversible,

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable et n'est pas inversible.

Selon certaines copies, la matrice A de l'énoncé serait symétrique.

4. Le calcul des images des éléments de la base $\mathcal{B}$ par l'endomorphisme Φ_A est généralement correct, mais l'écriture de la matrice Φ_A dans la base $\mathcal{B}$, qui est une matrice carrée d'ordre 4, comporte souvent des erreurs.
Quelques candidat(e)s oublient de répondre à la deuxième partie de la question, portant sur le rang.

5. Dans la plupart des copies, après obtention des valeurs propres par résolution d'un système d'équations, les sous-espaces sont entièrement déterminés, ce qui n'était pas nécessaire pour montrer que Φ_A est diagonalisable. Peu de candidat(e)s ont pensé à utiliser judicieusement les résultats des questions précédentes.

Partie III

La partie III étudie le cas où A est diagonalisable : Φ_A est alors diagonalisable et on peut former une base de diagonalisation de Φ_A à partir de bases de diagonalisation de A et de ${}^{\mathrm{t}}A$.

6. Quelques candidat(e)s, ayant mal lu l'énoncé, reprennent l'exemple de la matrice A d'ordre 2 de la partie II. Encore une fois, le jury conseille aux candidat(e)s de faire une lecture attentive du sujet.

Pour la première partie de la question, si $A = PDP^{-1}$, où P est inversible et D diagonale, pour obtenir une diagonalisation de ${}^{\mathrm{t}}A$, ne pas oublier de préciser que ${}^{\mathrm{t}}(P^{-1}) = ({}^{\mathrm{t}}P)^{-1}$.

Les correcteurs ont rencontré trop souvent l'erreur consistant à croire que les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux de A, cette erreur venant peut-être du cas particulier où A serait triangulaire.

7. Trop de candidat(e)s prennent la même lettre λ pour une valeur propre de A et pour une valeur propre de ${}^{\mathrm{t}}A$, alors qu'il faut prendre deux notations a priori distinctes, par exemple λ et μ.

Ce n'est que dans de rares copies que l'on pense à la condition ${}^{\mathrm{t}}XY \neq 0$, celle-ci n'étant alors pas toujours correctement établie.

8. Question peu souvent abordée et traitée alors de façon incomplète ou floue.

9. Quand cette question est abordée, l'argument d'une base de vecteurs propres pour Φ_A est en général bien vu.

10. Dans la plupart des copies abordant cette question, seule une inclusion est établie.

Partie IV

La partie IV étudie le sous-espace propre de Φ_A associé à une éventuelle valeur propre non nulle λ.

11. Cette question a été mal traitée (et maltraitée) dans la plupart des copies où elle a été abordée.

Des candidat(e)s sous-entendent que A et T commutent, ce qui est faux a priori.

Dans le raisonnement par récurrence, l'initialisation est souvent faite à $k = 1$ au lieu de $k = 0$.

Dans l'hérédité, l'erreur $\Phi_A(T^{k+1}) = \Phi_A(T^k)\Phi_A(T)$ a été trop souvent vue, et les calculs sont souvent faux ou inaboutis.

12. Question bien traitée quand elle a été abordée.

13. Question partiellement résolue dans d'assez nombreuses copies. Mais des copies présentent la famille considérée comme échelonnée en degrés, ce qui n'a pas de sens, puisqu'il ne s'agit pas de polynômes.

Partie V

La partie V porte sur le cas où A est symétrique : Φ_A est alors diagonalisable dans une base orthonormale obtenue à partir d'une base orthonormale de diagonalisation de A.

14. Question très facile, traitée dans la quasi-totalité des copies.

15. La manipulation des indices laisse souvent à désirer, et les solutions présentées sont en général fausses.

16. Question plutôt facile, mais peu réussie.

17. à 19. Ces questions ont été rarement abordées, probablement par manque de temps.

Les correcteurs ont estimé qu'il s'agit d'un très bon sujet, exempt d'erreur d'énoncé, très intéressant et varié, conforme à la lettre et à l'esprit du programme, de difficulté graduée, couvrant une large partie des connaissances exigibles des deux années, bien adapté à la voie scientifique, et un peu long, ce dont il a été tenu compte dans l'établissement du barème.

Le sujet évalue la connaissance du programme, mais aussi la capacité à résoudre des problèmes et à synthétiser.

Une bonne gradation de la difficulté a permis aux candidat(e)s de mettre en valeur leur travail de préparation des deux années dans des questions de facture classique, et a aussi permis, par des questions ouvertes ou plus délicates, aux meilleur(e)s de se dégager. L'aptitude au calcul et au raisonnement, les capacités à relier différentes questions, à argumenter et à synthétiser font partie des critères d'évaluation des copies.

L'écart entre les bonnes copies et les copies très faibles s'est nettement creusé. Les correcteurs ont trouvé le niveau des copies très hétérogène. Les candidat(e)s non préparé(e)s n'ont pas pu donner le change : la quasi-totalité des questions exigeait la connaissance du cours. Dans certaines copies, les compétences du candidat(e) en mathématiques apparaissent inférieures à celles attendues pour le baccalauréat.

La présentation des copies est satisfaisante, mais l'argumentation est souvent trop vague et approximative, et la rédaction manque de clarté, de précision, de concision.

Des règles élémentaires de rédaction et de présentation ne sont pas toujours respectées. On doit éviter les abréviations abusives. Rappelons qu'il est impératif de numéroter les questions, de mettre en évidence les résultats, par exemple en les encadrant proprement (à la règle), de séparer nettement les questions et de conclure clairement à la fin de chaque question. De plus, tous les calculs doivent figurer sur la copie.

L'éventail complet des notes a été utilisé, et le sujet a joué pleinement son rôle de sélection.

Au bilan, les candidat(e)s n'ont pas été surpris(es) et le sérieux du travail a été récompensé.

Moyenne de l'épreuve: 9,85 / 20.