BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

MATHEMATIQUES- Option scientifique
(épreuve n° 280)
ANNEE 2017
Épreuve conçue par HEC Paris
Voie économique et commerciale

Le sujet

Le problème de cette année portait sur l'approximation des fonctions par des polynômes.

Il comportait trois parties : la première étudiait le cas des polynômes de Bernstein, la deuxième celle des polynômes de Lagrange et enfin la dernière mettait en évidence le phénomène de Runge dans un cas particulier.

Les outils utilisés étaient très variés : algèbre linéaire, analyse classique et nombres complexes, probabilités. La longueur et la teneur du sujet ont permis à tous les candidats de tester leur niveau de connaissances et pour les meilleurs d'entre eux, d'exprimer la pleine mesure de leur talent.

Les résultats statistiques

Le barème de notation accordait des poids respectifs de 30% à la partie I, 18% à la partie II et 52% à la partie III.
Les questions de *Scilab* représentaient 6,3% des points de barème.

Sur les 2487 candidats présents à cette épreuve, la note moyenne s'établit à 10,58 avec un écart-type très élevé de 5,20 permettant d'opérer une bonne discrimination entre les candidats.
La note médiane est de 12,5 ; un quart des candidats obtient une note inférieure à 5,9 et 75% des candidats ont obtenu une note supérieure à 14,9.
Un peu plus de 50% des candidats obtiennent une note supérieure à 12 et près de 15% des candidats se voient attribuer une note supérieure à 16. On observe enfin 2,2% des candidats qui obtiennent une note supérieure à 19 dont 36 d'entre eux qui culminent à 20.
La note maximale de 20 fut accordée aux candidats ayant résolu avec succès un peu plus de la moitié du problème. Plus précisément, on obtenait 20 si on traitait correctement les parties I et II ou toute la partie III.

Par école, les statistiques sont les suivantes :

- HEC (2199 candidats) – moyenne : 11,14 ;
- ESCP Europe (2390 candidats) – moyenne : 10,85.

Commentaires

Comme l'an passé, on observe une tendance à l'homogénéité du niveau moyen des connaissances des candidats : sauf à de rares exceptions, on observe que les numéros des questions abordées sont les mêmes, les candidats avançant des arguments assez stéréotypés.
Le niveau des candidats est plutôt stable mais les écarts se creusent entre les bons ou très bons candidats et les candidats moyens ou faibles.
Les candidats n'ont pas été déroutés par ce sujet et ils ont le plus souvent abordé les trois parties qui commençaient chacune par des questions classiques et relativement simples.
Leur connaissance du cours est assez précise et ils citent les théorèmes utilisés.
Signalons enfin que la grande majorité des copies est lisiblement écrite, la rédaction est satisfaisante ; en particulier, les raisonnements par récurrence ou par « montée finie » sont presque toujours bien rédigés.

Partie I

Dans la première partie, excepté quelques candidats qui ne parviennent pas à entrer dans le formalisme, les premiers calculs sont corrects. Le premier obstacle concerne l'indépendance linéaire des polynômes de Bernstein, rarement bien exposée malgré l'étude préalable du cas particulier où $n = 2$.
Beaucoup de candidats éprouvent de grandes difficultés à calculer le terme dominant de $T_n(A_k)$.
La convergence en probabilité est bien connue, démontrée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ou par la loi faible des grands nombres.
La question plus difficile 3.d) est cependant correctement résolue par les meilleurs candidats.
Toutefois, les réponses sur l'interprétation du code *Scilab* sont rarement convaincantes.
En moyenne, cette partie donne aux candidats un peu plus de la moitié de leurs points de barème.

Partie II

La partie II était un peu plus courte que la précédente.
En ce qui concerne Φ, la majorité des candidats ont bien pensé à utiliser l'égalité des dimensions entre l'espace de départ et l'espace d'arrivée.
Ils parviennent très souvent à vérifier que Ψ est un produit scalaire mais curieusement, ils ont très rarement répondu à la question 6.a) et beaucoup mieux à la question 6.b) en la rédigeant parfois très bien.
Les questions 5.d) (matrice) et 6.d) sont très peu souvent réussies.

Partie III

La troisième partie, plus longue et moins guidée que les deux premières parties, est moins abordée.
Pour la question 7.a), les raisonnements sont très souvent inexacts mais la question analogue 8.b) a pu être parfois bien traitée en utilisant la décomposition de $v(x)$.
La question 9 est rarement traitée (surtout 9.a) et le calcul de l'intégrale 10.a) donne lieu à de nombreuses erreurs de calcul.
Quelques rares candidats sont allés plus loin dans le problème sans se contenter de divers grappillages de points.

ÉLÉMENTS DE CORRIGÉ - Maths HEC (S) 2017

Partie I. Quelques propriétés des polynômes de Bernstein

1.a) On a : $B_{2,0}(X) = 1 - 2X + X^2$, $B_{2,1}(X) = 2X - 2X^2$, $B_{2,2}(X) = X^2 \Longrightarrow K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) La matrice K_2 est triangulaire inférieure, de valeurs propres 1 et 2, donc inversible (0 n'est pas valeur propre). Par suite, la famille $(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

c) Les calculs donnent : $T_2(A_0) = A_0$, $T_2(A_1) = A_1$ et $T_2(A_2) = 1/2\, A_1 + 1/2\, A_2 \Longrightarrow H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

La matrice H_2 est triangulaire supérieure de valeurs propres 1 et 1/2. Les sous-espaces propres sont :

Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ pour la valeur propre 1 et Vect $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ pour la valeur propre 1/2.

2.a) $\forall x \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k B_{n,k}(x) = \lambda_0(1-x)^n + n\lambda_1 x(1-x)^{n-1} + \cdots + \lambda_n x^n = 0 \Longrightarrow$ pour $x = 0$, $\lambda_0 = 0$. Par suite, $\forall x \in \mathbf{R}^*$, $n\lambda_1 x(1-x)^{n-1} + \cdots + \lambda_n x^n = 0$. On simplifie par x, d'où, $n\lambda_1(1-x)^{n-1} + \cdots + \lambda_n x^{n-1} = 0$ et pour $x = 0$, on trouve $\lambda_1 = 0$. On réitère le procédé pour aboutir à $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.
La famille $(B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n})$ est une famille libre et elle est formée de $(n+1) = \dim \mathbf{R}_n[X]$ éléments de $\mathbf{R}_n[X]$ (car $\deg(B_{n,k}) = n$) : c'est donc une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
b) T_n est clairement une application de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}_n[X]$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ et $(P, Q) \in (\mathbf{R}_n[X])^2$.
On a : $T_n(\alpha P + \beta Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\alpha P + \beta Q)\Big(\frac{k}{n}\Big) B_{n,k} = \alpha \sum_{k=0}^{n} P\Big(\frac{k}{n}\Big) B_{n,k} + \beta \sum_{k=0}^{n} Q\Big(\frac{k}{n}\Big) B_{n,k} = \alpha T_n(P) + \beta T_n(Q)$.
Par suite, T_n est linéaire et c'est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
Soit $P \in \mathrm{Ker}(T_n) \iff \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P\Big(\frac{k}{n}\Big) B_{n,k} = 0$. Puisque $(B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n})$ est une famille libre, on a : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P\Big(\dfrac{k}{n}\Big) = 0$. Donc, le polynôme P possède au moins $(n+1)$ racines et il est de degré inférieur ou égal à n. Il en résulte que $P = 0$, d'où $\mathrm{Ker}(T_n) = \{0\}$.
L'endomorphisme T_n est donc injectif et puisque $\mathbf{R}_n[X]$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, T_n est un automorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
c) $T_n(A_0)(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$. La formule du binôme $\Longrightarrow T_n(A_0)(X) = (X + 1 - X)^n$, soit, $T_n(A_0)(X) = 1$. Par suite, $T_n(A_0) = A_0$.
De même, $T_n(A_1)(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \times \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^{k+1}(1-X)^{n-(k+1)}$, soit encore,

$$T_n(A_1)(X) = X \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k(1-X)^{(n-1)-k} = X(X + 1 - X)^{n-1} = X, \text{ donc, } T_n(A_1) = A_1.$$

d) $\deg T_n(A_0) = \deg(A_0) = 0$ et $\deg T_n(A_1) = \deg(A_1) = 1$. On suppose : $\forall j \in [\![0, k]\!]$, $\deg T_n(A_j) = j$.
Ainsi, on pose : $T_n(A_k) = \alpha_k X^k + \cdots\cdots$ avec $\alpha_k \neq 0$. La propriété admise permet d'écrire :
$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $T_n(A_{k+1})(X) = \dfrac{n-k}{n} \alpha_k X^{k+1} + \cdots\cdots$, soit $T_n(A_{k+1})(X) = \alpha_{k+1} X^{k+1} + \cdots\cdots$

Or, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\alpha_{k+1} = \dfrac{n-k}{n} \alpha_k \neq 0$. Par suite, $\deg T_n(A_{k+1}) = k+1$.
Finalement, le principe de récurrence $\Longrightarrow \forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg T_n(A_k) = k$.
e) $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\alpha_{k+1} = \dfrac{n-k}{n} \alpha_k \Longrightarrow$ de proche en proche : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_k = \dfrac{n!}{n^k (n-k)!}$.
La matrice H_n de T_n dans la base $\mathcal{C}_n$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ avec $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_k \neq 0$. Les valeurs propres de H_n sont $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ et $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ distinctes, soit $(n+1)$ valeurs propres dont n sont distinctes.
Or, les vecteurs A_0 et A_1 sont des vecteurs propres de T_n associés à la valeur propre 1 et la famille (A_0, A_1) est libre. Par suite, en notant $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathcal{E}_{\alpha_k}$, le sous-espace propre associé à la valeur propre α_k, on a $\dim \mathcal{E}_1 \geqslant 2$ et $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $\dim \mathcal{E}_{\alpha_k} \geqslant 1$. Il en résulte que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dim \mathcal{E}_{\alpha_k} \geqslant n+1$ et puisque cette somme ne peut excéder $n+1$, on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dim \mathcal{E}_{\alpha_k} = n+1 = \dim \mathbf{R}_n[X]$. Par suite, T_n est diagonalisable.

3.a) Soit $\varepsilon > 0$. On a classiquement : $\mathbf{E}(\overline{Z}_n) = z$ et $\mathbf{V}(\overline{Z}_n) = \dfrac{z(1-z)}{n}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'écrire : $0 \leqslant \mathbf{P}([|\overline{Z}_n - z| > \varepsilon]) \leqslant \dfrac{z(1-z)}{n\,\varepsilon^2} \to 0$ quand n tend vers $+\infty$.
Il en résulte alors par définition que la suite de variables aléatoires $(\overline{Z}_n)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité vers z.
b) La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ donc $|f|$ également $\Longrightarrow |f|$ admet un minimum et un maximum M sur $[0,1]$ (cours).
c) Soit $\omega \in \Omega$.
Si $U_n(\omega) = 1$, alors $|f(\overline{Z}_n)(\omega) - f(z)| \leqslant |f(\overline{Z}_n)(\omega)| + |f(z)| \leqslant 2M = 2M \times 1 + \varepsilon \times 0$.
Si $U_n(\omega) = 0$, alors $\overline{U}_n = \left[\left|f(\overline{Z}_n)(\omega) - f(z)\right| \leqslant \varepsilon\right]$. On a bien : $\left|f(\overline{Z}_n)(\omega) - f(z)\right| \leqslant \varepsilon = 2M \times 0 + \varepsilon \times 1$.
Bilan : on a l'inégalité suivante entre variables aléatoires, $|f(\overline{Z}_n) - f(z)| \leqslant 2M \times \mathbf{1}_{U_n} + \varepsilon \times \mathbf{1}_{\overline{U}_n}$.
d) Par croissance de l'espérance (cours), on a : $0 \leqslant \mathbf{E}(|f(\overline{Z}_n) - f(z)|) \leqslant 2M\,\mathbf{P}(U_n) + \varepsilon\,\mathbf{P}(\overline{U}_n)$.
Or, puisque la suite $(\overline{Z}_n)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité vers z et que f est continue, on sait d'après le cours que la suite $(f(\overline{Z}_n))_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité vers $f(z)$. Donc, $\mathbf{P}(U_n) = \mathbf{P}\left(\left[\left|f(\overline{Z}_n) - f(z)\right| > \varepsilon\right]\right) \to 0$ quand n tend vers $+\infty$. Par suite, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(\overline{U}_n) = 1$ et par encadrement, on a, $0 \leqslant \mathbf{E}(|f(\overline{Z}_n) - f(z)|) \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbf{E}(f(\overline{Z}_n)) = f(z)$. Enfin, il est clair, d'après le théorème du transfert, que l'on a $\mathbf{E}(f(\overline{Z}_n)) = f_n(z)$.
Bilan : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbf{E}(f(\overline{Z}_n)) = \lim_{n \to +\infty} f_n(z) = f(z)$.

4.a) `Z=grand(1,1,"bin",n,z)`.
b) C'est une approximation de $f(z)$. Deux niveaux d'approximation : convergence de $\mathbf{E}(f(\overline{Z}_n))$ vers $f(z)$ et méthode de Monte-Carlo $\mathbf{E}(f(\overline{Z}_n))$ vers son approximation stochastique avec $N = 1000$.

Partie II. Les polynômes d'interpolation de Lagrange

5.a) Φ est linéaire et injective car si $P \in \operatorname{Ker}\Phi$ avec $\deg(P) \leqslant n$, alors P admet $(n+1)$ racines distinctes, donc $P = 0$ et $\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$. Or, $\dim \mathbf{R}_n[X] = \dim \mathbf{R}^{n+1} = n+1$. Bilan : Φ est un isomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$.
b) $\Phi(L_i) = e_i \Longleftrightarrow \Phi(L_i) = (L_i(x_0), L_i(x_1), \ldots, L_i(x_i), L_i(x_{i+1}), \ldots, L_i(x_n)) = (0, 0, \ldots 1, 0, \ldots, 0)$.
Donc, $\forall i \in [\![0, n]\!]$, L_i s'annule en n points $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ et vaut 1 en x_i.
Par suite, il existe une constante réelle $c \in \mathbf{R}^*$ telle que, $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $L_i(X) = c \displaystyle\prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} (X - x_k)$.

Or, $L_i(x_i) = 1 \Longrightarrow 1 = c \prod\limits_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} (x_i - x_k) \Longrightarrow c = \Big(\prod\limits_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} (x_i - x_k) \Big)^{-1} \Longrightarrow \forall i \in [\![0, n]\!],\ L_i(X) = \prod\limits_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} \dfrac{X - x_k}{x_i - x_k}$.

c) Un polynôme réel non nul de degré inférieur ou égal à n ayant au plus n racines distinctes, on déduit que pour toute suite $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $(n+1)$ réels deux à deux distincts, l'application Ψ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$. Il est clair que pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $L_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Longrightarrow (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une famille orthonormée dans $\mathbf{R}_n[X]$: c'est donc une famille libre (cours) et elle est constituée de $(n+1)$ éléments.
Bilan : $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}_n[X]$.
d) Puisque $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$, tout polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ s'écrit de manière unique : $P = \sum\limits_{i=0}^{n} \nu_i L_i$ avec $(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Or, $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $P(x_j) = \sum\limits_{i=0}^{n} \nu_i \delta_{i,j} = \nu_j$, d'où $P = \sum\limits_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.

Ainsi, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $X^k = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^k L_i$. Par suite, la matrice A est définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots x_n^n \end{pmatrix}$

e) D'après la question d), le polynôme $P_f = \sum\limits_{i=0}^{n} f(x_i) L_i$ vérifie les conditions requises et il est unique.

6.a) Puisque $P_f \in \mathbf{R}_n[X]$ et $Q_f \in \mathbf{R}_{n+1}[X]$, on a $(Q_f - P_f) \in \mathbf{R}_{n+1}[X]$. Donc, $\deg(Q_f - P_f) \leqslant n+1$ et il est clair que $\forall i \in [\![0,n]\!]$, on a $(Q_f - P_f)(x_i) = 0$. Par suite, le polynôme w qui est de degré $(n+1)$ divise le polynôme $(Q_f - P_f)$, donc il existe un réel δ tel que pour tout $t \in [a,b]$, on a : $Q_f(t) - P_f(t) = \delta \times w(t)$.
b) On a : $\forall t \in [a,b]$, $h(t) = f(t) - Q_f(t) = f(t) - P_f(t) - \delta \times w(t)$.
Il est clair que $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $h(x_i) = f(x_i) - P_f(x_i) - \delta \times w(x_i) = 0$ et que $h(\overline{x}) = f(\overline{x}) - Q_f(\overline{x}) = 0$.
Bilan : la fonction h s'annule en les $(n+2)$ points $\overline{x}, x_0, x_1, \ldots, x_n$.
On ordonne la famille $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \overline{x})$ en $(y_0, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$ de sorte que $a \leqslant y_0 < y_1 < \cdots < y_n < y_{n+1} \leqslant b$.
La fonction h est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$ car f est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$ et Q_f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.
On a : $h(y_0) = h(y_1) = \cdots = h(y_n) = h(y_{n+1}) = 0$. Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_0 \in]y_0, y_1[$, $c_1 \in]y_1, y_2[, \ldots, c_{n-1} \in]y_{n-1}, y_n[, c_n \in]y_n, y_{n+1}[$, c'est-à-dire au moins $(n+1)$ réels deux à deux distincts, tels que $h'(c_0) = 0, h'(c_1) = 0, \ldots, h'(c_{n-1}) = 0, h'(c_n) = 0$.
En réitérant ce raisonnement pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$, la fonction $h^{(k)}$ s'annule en $(n+2-k)$ réels de $]a,b[$ deux à deux distincts. En particulier, $h^{(n+1)}$ s'annule en au moins un réel $\theta \in]a,b[$.
Autrement dit, il existe un réel $\theta \in]a,b[$ tel que $h^{(n+1)}(\theta) = 0$.
c) On a $h^{(n+1)}(\theta) = f^{(n+1)}(\theta) - P_f^{(n+1)}(\theta) - \delta \times w^{(n+1)}(\theta)$. Or, $\deg(P_f) \leqslant n$ et $\deg(w) = n+1$ avec w unitaire.
Par suite, $P_f^{(n+1)} = 0$ et $w^{(n+1)} = (n+1)!$; il en résulte que $0 = f^{(n+1)}(\theta) - \delta(n+1)! \Longrightarrow \delta = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$.
Donc : $f(\overline{x}) - P_f(\overline{x}) = Q_f(\overline{x}) - P_f(\overline{x}) = \delta \times w(\overline{x})$. Ainsi, pour tout $\overline{x} \in [a,b]$ différent de $x_0, x_1, \ldots, x_n$, on a : $f(\overline{x}) - P_f(\overline{x}) = \dfrac{1}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(\theta) \times w(\overline{x})$.

Comme la fonction f est de classe C^{n+1} sur le segment $[a,b]$, la fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a,b]$ et elle admet donc une borne supérieure. Il est clair que si $\overline{x}$ est égal à l'un des x_i, l'égalité précédente reste valide puisque dans ce cas, $f(\overline{x}) - P_f(\overline{x}) = 0$ et $w(\overline{x}) = 0$, donc n'importe quel réel $\theta \in]a,b[$ convient.
Par suite, $\forall t \in [a,b]$, on a : $\left|f(t) - P_f(t)\right| = \dfrac{1}{(n+1)!} \times |w(t)| \times \left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!} \times |w(t)| \times \sup\limits_{[a,b]} \left|f^{(n+1)}\right|$.

Partie III. Exemple d'interpolation et phénomène de Runge

7.a) La fonction f_ρ est l'inverse d'une fonction strictement positive sur $\mathbf{R}$, donc le dénominateur de f_ρ ne s'annule pas $\Longrightarrow f_\rho$ est indéfiniment dérivable et de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.
b) La fonction f_ρ est paire sur $\mathbf{R}$ (et en particulier sur tout intervalle de la forme $]-\gamma,\gamma[$). Donc, $\forall x\in\mathbf{R}$, $f_\rho(-x)=f_\rho(x)\Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*,\ f_\rho^{(n)}(x)=(-1)^n f_\rho^{(n)}(-x)\Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbf{R},\ |f_\rho^{(n)}(x)|=|f_\rho^{(n)}(-x)|$.

c) $\forall x\in\mathbf{R},\ f_\rho(x)=\dfrac{1}{x^2+\rho^2}=\dfrac{1}{\rho^2}\left(1+\dfrac{x^2}{\rho^2}\right)^{-1}$ et $\forall |x|<\rho,\ \left(1+\dfrac{x^2}{\rho^2}\right)^{-1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{x^2}{\rho^2}\right)^k\Longrightarrow$

$$\forall |x|<\rho,\ f_\rho(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\rho^{2k+2}}x^{2k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\beta_k\,x^{2k}.$$

8.a) $\forall x\in]-\rho,\rho[,\ v(x)=\dfrac{\rho^2}{\rho^2-x^2}=\dfrac{p}{\rho-x}+\dfrac{q}{\rho+x}=\dfrac{(p-q)x+(p+q)\rho}{\rho^2-x^2}\Longrightarrow p-q=0$ et $p+q=\rho\Longrightarrow p=q=\dfrac{\rho}{2}$.
b) La fonction v est paire sur $]-\rho,\rho[\Longrightarrow\forall x\in]-\rho,\rho[,\ v^{(n)}(-x)=(-1)^n v^{(n)}(x)$, d'où : $|v^{(n)}(x)|=|v^{(n)}(-x)|$.

c) On suppose que $0<x<\rho$. Le résultat admis permet d'écrire : $\forall x\in]0,\rho[,\ f_\rho^{(n)}(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\rho^{2k+2}}\times A_{2k}^{(n)}(x)$.

Par suite, $\forall x\in]0,\rho[,\ |f_\rho^{(n)}(x)|\leqslant\dfrac{1}{\rho^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\rho^{2k}}\times|A_{2k}^{(n)}(x)|=\frac{1}{\rho^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\rho^{2k}}\times A_{2k}^{(n)}(x)$ car $\forall x>0,\ \forall k\in\mathbf{N}$, on a : $A_{2k}^{(n)}(x)\geqslant 0$. D'où, $\forall x\in]0,\rho[,\ |f_\rho^{(n)}(x)|\leqslant\dfrac{1}{\rho^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{A_{2k}(x)}{\rho^{2k}}\right)^{(n)}$. Or, d'après le résultat admis, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{A_{2k}(x)}{\rho^{2k}}\right)^{(n)}$ est, la dérivée n-ième de la somme de la série géométrique convergente $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A_{2k}(x)}{\rho^{2k}}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{\rho^2}\right)^k$ (car $0<x<\rho$).

Mais, $\forall x\in]0,\rho[,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{\rho^2}\right)^k=\frac{\rho^2}{\rho^2-x^2}=v(x)$. Par suite, $\forall x\in]0,\rho[,\ |f_\rho^{(n)}(x)|\leqslant\dfrac{1}{\rho^2}\times v^{(n)}(x)=\dfrac{1}{\rho^2}\times|v^{(n)}(x)|$.
On peut remarquer en effet que $\forall x\in]0,\rho[,\ v^{(n)}(x)>0$.
Si $-\rho<x<0$, alors $0<-x<\rho$. Donc, $\forall x\in]-\rho,0[,\ |f_\rho^{(n)}(-x)|\leqslant\dfrac{1}{\rho^2}\times|v^{(n)}(-x)|$.
Or, d'après les questions 7.b) et 8.b), on a $|f_\rho^{(n)}(x)|=|f_\rho^{(n)}(-x)|$ et $|v^{(n)}(x)|=|v^{(n)}(-x)|$. Par suite, $\forall x\in]-\rho,0[,\ |f_\rho^{(n)}(x)|\leqslant\dfrac{1}{\rho^2}\times|v^{(n)}(x)|$. Bilan : $\forall x\in]-\rho,\rho[$, on a : $|f_\rho^{(n)}(x)|\leqslant\dfrac{1}{\rho^2}\times|v^{(n)}(x)|$.

d) $\forall x\in]-\rho,\rho[,\ v(x)=\dfrac{\rho}{2}\left(\dfrac{1}{\rho-x}+\dfrac{1}{\rho+x}\right)$. À l'aide d'une récurrence claire, la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{\rho-x}$ a pour dérivée n-ième $\dfrac{n!}{(\rho-x)^{n+1}}$ et la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{\rho+x}$ a pour dérivée n-ième $\dfrac{(-1)^n\,n!}{(\rho+x)^{n+1}}$. Par suite,
$\forall x\in]-\rho,\rho[,\ v^{(n)}(x)=\dfrac{n!\,\rho}{2}\left(\dfrac{1}{(\rho-x)^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n}{(\rho+x)^{n+1}}\right)\leqslant\dfrac{n!\,\rho}{2}\left(\dfrac{1}{|\rho-x|^{n+1}}+\dfrac{1}{|\rho+x|^{n+1}}\right)$.
Or, puisque $-\rho<-1\leqslant x\leqslant 1<\rho$, on a : $0<\dfrac{1}{\rho+x}\leqslant\dfrac{1}{\rho-1}$ et $0<\dfrac{1}{\rho-x}\leqslant\dfrac{1}{\rho-1}$.
Donc, $|v^{(n)}(x)|\leqslant\dfrac{n!\,\rho}{2}\left(\dfrac{2}{(\rho-1)^{n+1}}\right)=\dfrac{n!\,\rho}{(\rho-1)^{n+1}}$.
Il en résulte que pour tout $x\in[-1,1]$ et tout $\rho>1$, on a : $|f_\rho^{(n)}(x)|\leqslant\dfrac{1}{\rho^2}\times\dfrac{n!\,\rho}{(\rho-1)^{n+1}}=\dfrac{n!}{\rho(\rho-1)^{n+1}}$.

9. Il est clair que si x est égal à l'un des $x_{i,n}$, les inégalités des questions a) et b) sont vérifiées puisque dans ce cas, on $w_n(x)=0$.

a) On a $|w_n(x)| = \prod_{i=0}^{n} |x - x_{i,n}|$ avec $x \in]\,x_{k,n}\,,\, x_{k+1,n}[$ et $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $x_{i,n} = -1 + \dfrac{2\,i}{n}\cdot$

Pour $i \leqslant k$, on a : $x_{i,n} \leqslant x_{k,n} < x < x_{k+1,n} \Longrightarrow |x - x_{i,n}| = x - x_{i,n} \leqslant x_{k+1,n} - x_{i,n} = \dfrac{2(k-i+1)}{n}\cdot$

Pour $i \geqslant k+1$, on a : $x_{k,n} < x < x_{k+1,n} \leqslant x_{i,n} \Longrightarrow |x - x_{i,n}| = x_{i,n} - x \leqslant x_{i,n} - x_{k,n} = \dfrac{2(i-k)}{n}\cdot$

Par suite, $|w_n(x)| \leqslant \left(\dfrac{2}{n}\right)^{n+1} (k+1)\times k\times\ldots\times 1\times 1\times 2\times\ldots\times(n-k) = \left(\dfrac{2}{n}\right)^{n+1}\times(k+1)!\,(n-k)!$.

On a : $\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{n+1}{k+1}$ et $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dbinom{n+1}{k+1} \geqslant \dbinom{n+1}{1} = n+1$, d'où,

$\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \geqslant 1 \Longleftrightarrow (k+1)!(n-k)! \leqslant n! \Longrightarrow |w_n(x)| \leqslant \left(\dfrac{2}{n}\right)^{n+1}\times n!\,.$

b) On a : $\left(\dfrac{2}{n}\right)^{n+1}\times n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{2}{n}\right)^{n+1} n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}\left(\dfrac{\mathrm{e}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\right)$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\right) = 0$.

Par suite, $0 \leqslant \dfrac{|w_n(x)|}{(2/\mathrm{e})^{n+1}} \leqslant \dfrac{(2/n)^{n+1}n!}{(2/\mathrm{e})^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \to 0 \Longrightarrow \dfrac{|w_n(x)|}{(2/\mathrm{e})^{n+1}} \to 0$ quand n tend vers $+\infty$.

Bilan : il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a pour tout $x \in [-1, 1]$: $|w_n(x)| \leqslant \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}\cdot$

c) La question 6.d) $\Longrightarrow \forall x \in [-1, 1]$, on a : $\left|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}\times|w_n(x)|\times \sup\limits_{[-1,1]}\left|f_\rho^{(n+1)}\right|$.

La question 8.d) $\Longrightarrow \forall x \in [-1, 1]$, on a : $\left|f_\rho^{(n+1)}(x)\right| \leqslant \dfrac{(n+1)!}{\rho(\rho-1)^{n+2}}$, avec $\rho > 1$.

Par suite, $\sup\limits_{[-1,1]}\left|f_\rho^{(n+1)}\right| \leqslant \dfrac{(n+1)!}{\rho(\rho-1)^{n+2}}\cdot$ Enfin, la question 9.b) précise que pour n suffisamment grand, on a :

$\forall x \in [-1, 1]$, $|w_n(x)| \leqslant \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}\cdot$ D'où, $\forall x \in [-1, 1]$, on a : $\left|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{\rho(\rho-1)}\left(\dfrac{2/\mathrm{e}}{\rho-1}\right)^{n+1}\cdot$

Ainsi, $\left|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)\right|$ tend vers 0 si $\dfrac{2/\mathrm{e}}{\rho-1} < 1$ (série géométrique), c'est-à-dire si $\rho > 1 + \dfrac{2}{\mathrm{e}}\cdot$

10.a) La fonction $t \longmapsto \ln(t^2+\rho^2)$ est paire sur $[-1, 1] \Longrightarrow \displaystyle\int_{-1}^{1} \ln(t^2+\rho^2)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \ln(t^2+\rho^2)\,\mathrm{d}t$.

Une intégration par parties de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t^2+\rho^2)\,\mathrm{d}t$ permet d'écrire :

$$\int_0^1 \ln(t^2+\rho^2)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(t^2+\rho^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+\rho^2}\,\mathrm{d}t = \ln(1+\rho^2) - 2\Big(\int_0^1 \mathrm{d}t - \rho^2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\rho^2}\Big)\cdot$$

Le changement de variable $t = \rho\,u$ dans la dernière intégrale conduit à :

$$\int_0^1 \ln(t^2+\rho^2)\,\mathrm{d}t = \ln(1+\rho^2) - 2 + 2\,\rho\left[\mathrm{Arctan}(u)\right]_0^{\frac{1}{\rho}} = \ln(1+\rho^2) - 2 + 2\,\rho\,\mathrm{Arctan}\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\cdot$$

Il en résulte que : $\forall \rho > 0$, $H(\rho) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln(t^2+\rho^2)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int_0^1 \ln(t^2+\rho^2)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\ln(1+\rho^2) - 1 + \rho\,\mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{1}{\rho}\Big)\cdot$

On sait que $\lim\limits_{\rho\to0^+}\mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{1}{\rho}\Big) = \dfrac{\pi}{2}$, d'où $\lim\limits_{\rho\to0^+}\rho\,\mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{1}{\rho}\Big) = 0$. Par suite, $\lim\limits_{\rho\to0^+} H(\rho) = -1$.

On peut donc prolonger par continuité la fonction H en 0 en posant $H(0) = -1$.

b) La fonction H est continue sur $\mathbf{R}_+$ et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ (somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}_+^*$).

On rappelle que $\forall y \in \mathbf{R}$, la dérivée de $\mathrm{Arctan}(y)$ est $\dfrac{1}{1+y^2}\cdot$ Par suite, $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $H'(x) = \mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{1}{x}\Big) > 0$.

Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$ et $x\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) \geqslant 0$ (en fait, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$, mais ce résultat n'est pas indispensable pour pouvoir conclure).

Bilan : la fonction H réalise une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}_+$ sur $[-1,+\infty]$.

c) On a : $(\ln 2 - 1) \in]-1, 0[\subset [-1, +\infty[$. Notons H^{-1} la bijection réciproque de H.

Le théorème de la bijection permet alors d'établir l'existence et l'unicité d'un réel ρ_0 tel que $H(\rho_0) = \ln 2 - 1$, c'est-à-dire $\rho_0 = H^{-1}(\ln 2 - 1)$. La stricte croissance de $H^{-1} \Longrightarrow H^{-1}(-1) < H^{-1}(\ln 2 - 1) < H^{-1}(0) = \rho_1 \Longleftrightarrow 0 < \rho_0 < \rho_1$. Or, $H(1) = \dfrac{1}{2}\ln 2 - 1 + \dfrac{\pi}{4} \simeq 0.131 > 0 \Longrightarrow \rho_1 < 1$. Bilan : $0 < \rho_0 < 1$.

d) On a : $\forall \rho > 0$, $w_n(i\rho) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(i\rho - x_{k,n})$ qui est un produit de complexes non nuls puisque $\rho > 0$.

Par suite, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $|i\rho - x_{k,n}| > 0 \Longrightarrow |w_n(i\rho)|^2 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}|i\rho - x_{k,n}|^2 = \prod_{k=0}^{n}(\rho^2 + x_{k,n}^2) > 0$.

En prenant les logarithmes, on obtient : $\ln|w_n(i\rho)|^2 = 2\ln|w_n(i\rho)| = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\ln\left(\rho^2 + \left(-1+\frac{2k}{n}\right)^2\right)$,

d'où, $\dfrac{1}{n}\ln|w_n(i\rho)| = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\ln\left(\rho^2 + \left(-1+\frac{2k}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\rho^2 + \left(-1+\frac{2k}{n}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\frac{\ln(1+\rho^2)}{n}$.

Or, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\rho^2 + \left(-1+\frac{2k}{n}\right)^2\right)$ est une somme de Riemann associée à la fonction $t \longmapsto \ln\left(\rho^2 + (-1+2t)^2\right)$ continue sur $[0,1]$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\rho^2 + \left(-1+\frac{2k}{n}\right)^2\right) = \int_0^1 \ln\left(\rho^2 + (-1+2t)^2\right)\mathrm{d}t$.

D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\rho^2)}{n} = 0$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\ln|w_n(i\rho)| = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \ln\left(\rho^2 + (-1+2t)^2\right)\mathrm{d}t$.

Le changement de variable $u = -1+2t \Longrightarrow \displaystyle\int_0^1 \ln\left(\rho^2+(-1+2t)^2\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\ln\left(\rho^2+u^2\right)\mathrm{d}u = \int_0^1 \ln(\rho^2+u^2)\,\mathrm{d}u$.

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\ln|w_n(i\rho)| = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \ln(\rho^2+u^2)\,\mathrm{d}u = H(\rho)$ d'après la question 10.a).

11. On note G la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $G(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x^2}{4}\right) + x\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Le programme consiste à rechercher par une méthode dichotomique, une solution s_0 de l'équation $G(x) = 0$, c'est-à-dire que s_0 vérifie $G(s_0) = 0$. Puisque $G(x) = H(x) - H(\rho_0)$, on a $0 = G(s_0) = H(s_0) - H(\rho_0)$ et comme H est bijective, on a $s_0 = \rho_0$.

12.a) Puisque $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P_{f_\rho,n}(x_{k,n}) = f_\rho(x_{k,n}) = \dfrac{1}{\rho^2 + x_{k,n}^2}$, on a : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $S_n(x_{k,n}) = 0$.

Donc, S_n admet au moins $(n+1)$ racines distinctes $x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{n,n}$ qui sont toutes les racines de w_n.

Bilan : le polynôme w_n divise le polynôme S_n qui est donc de degré supérieur ou égal à $(n+1)$.

b) $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $L_i(X) = \displaystyle\prod_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k\neq i}}\frac{X - x_{k,n}}{x_{i,n} - x_{k,n}} \Longrightarrow L_i(-X) = \prod_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k\neq i}}\frac{-X - x_{k,n}}{x_{i,n} - x_{k,n}} = (-1)^n\prod_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k\neq i}}\frac{X + x_{k,n}}{x_{i,n} - x_{k,n}}$. Or,

$\forall j \in [\![0,n]\!]$, $x_{n-j,n} = -x_{j,n} \Longrightarrow L_i(-X) = (-1)^n\displaystyle\prod_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ n-k\neq n-i}}\frac{X - x_{n-k,n}}{-x_{n-i,n} + x_{n-k,n}} = \prod_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ n-k\neq n-i}}\frac{X - x_{n-k,n}}{x_{n-i,n} - x_{n-k,n}} = L_{n-i}(X)$.

D'autre part, $P_{f_\rho,n}(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f_\rho(x_{i,n})L_i(X) \Longrightarrow P_{f_\rho,n}(-X) = \sum_{i=0}^{n} f_\rho(x_{i,n})L_i(-X) = \sum_{i=0}^{n} f_\rho(x_{i,n})L_{n-i}(X)$.

Puisque f_ρ est paire, on a $f_\rho(x_{i,n}) = f_\rho(-x_{i,n}) = f_\rho(x_{n-i,n}) \Longrightarrow P_{f_\rho,n}(-X) = \sum_{i=0}^{n} f_\rho(x_{n-i,n})L_{n-i}(X)$ et le changement d'indice $j = n - i \Longrightarrow P_{f_\rho,n}(-X) = \sum_{j=0}^{n} f_\rho(x_{j,n})L_j(X) = P_{f_\rho,n}(X)$.

Bilan : quelle que soit la parité de l'entier n, le polynôme $P_{f_\rho,n}$ est pair.

c) On a : $w_n(1 - 1/n) = w_n(y_n) = \prod_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{2k}{n}\right) = \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{2n-2k-1}{n}\right) = \frac{1}{n^{n+1}}\prod_{k=0}^{n}(2n-2k-1)$.

Le changement d'indice $j = n - k \Longrightarrow |w_n(y_n)| = \frac{1}{n^{n+1}}\prod_{j=0}^{n}|2j-1| = \frac{1}{n^{n+1}}\times 1\times 3\times \ldots \times 2n-1$, soit encore

$|w_n(y_n)| = \frac{1}{n^{n+1}}\times\frac{(2n)!}{2\times 4\times \ldots\times 2n} = \frac{(2n)!}{2^n\times n^{n+1}\times n!}$.

La formule de Stirling $\Longrightarrow |w_n(y_n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n}\,\mathrm{e}^{-2n}}{2^n\,n^{n+1}\,\sqrt{2\pi n}\,\mathrm{e}^{-n}\,n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n}\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n$ (donc, $\tau = \sqrt{2}$ et $\sigma = 2/\mathrm{e}$).

d) $\lim_{n\to+\infty}\left(\ln|w_n(i\rho)| - nH(\rho)\right) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\ln|w_n(i\rho)| - \ln\left(\exp(nH(\rho)\right)\right) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\ln\frac{|w_n(i\rho)|}{\mathrm{e}^{nH(\rho)}}\right) = 0$

$\Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{|w_n(i\rho)|}{\mathrm{e}^{nH(\rho)}} = 1 \Longleftrightarrow |w_n(i\rho)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{nH(\rho)}$.

Par suite, $\left|\frac{w_n(y_n)}{w_n(i\rho)}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{\sqrt{2}}{n}(2/\mathrm{e})^n}{\mathrm{e}^{nH(\rho)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n}\times\mathrm{e}^{-n\left(1-\ln 2+H(\rho)\right)}$.

13.a) Posons $n = 2p+1$. On a : $w_n(i\rho) = \prod_{k=0}^{2p+1}(i\rho - x_{k,2p+1}) = \prod_{k=0}^{p}(i\rho - x_{k,2p+1})\times\prod_{k=p+1}^{2p+1}(i\rho - x_{k,2p+1})$.

La relation $\forall k\in [\![0,2p+1]\!]$, $x_{k,2p+1} = -x_{2p+1-k,2p+1}$ et le changement d'indice $j = 2p+1-k$ dans le second produit $\Longrightarrow w_n(i\rho) = \prod_{k=0}^{p}(-\rho^2 - x_{k,2p+1}^2) = (-1)^{p+1}\prod_{k=0}^{p}(\rho^2 + x_{k,2p+1}^2)$ qui est un réel non nul.

Puisque le polynôme $P_{f\rho,n}$ est pair (question 12.b), il est clair que le polynôme S_n est également pair.
Il en résulte que le degré de S_n est pair. D'autre part, $\deg(P_{f_\rho,n}) \leqslant n \Longrightarrow \deg(S_n) \leqslant n+2$, compte tenu de la définition de S_n. Or, $\deg(S_n) \geqslant n+1$ (question 12.a), donc le degré de S_n ne peut que valoir $(n+1)$ ou $(n+2)$.
Comme n est impair, $(n+1)$ est pair et donc, le degré de S_n est égal à $(n+1) = \deg(w_n)$.
Par suite, il existe une constante complexe c telle que : $S_n(X) = c\times w_n(X)$.
Or, $S_n(i\rho) = 1$, d'où, $1 = c\times w_n(i\rho)$ et comme $w_n(i\rho) \neq 0$, on a : $S_n(X) = \frac{w_n(X)}{w_n(i\rho)}$.

b) D'après ce qui précède, on a : $\forall x\in[-1,1]$, $S_n(x) = 1 - (x^2+\rho^2)P_{f_\rho,n}(x) = \frac{w_n(x)}{w_n(i\rho)}$. En multipliant les deux membres de la dernière égalité par $f_\rho(x)$ (qui n'est pas nul), on obtient : $f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x) = f_\rho(x)\times\frac{w_n(x)}{w_n(i\rho)}$,

d'où : $\forall x\in[-1,1]$, $\left|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)\right| = f_\rho(x)\times\left|\frac{w_n(x)}{w_n(i\rho)}\right|$.

14.a) Pour $y_n = 1-\frac{1}{n}$, on a : $\left|f_\rho(y_n) - P_{f_\rho,n}(y_n)\right| = f_\rho(y_n)\times\left|\frac{w_n(y_n)}{w_n(i\rho)}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1+\rho^2}\times\frac{\sqrt{2}}{n}\times\mathrm{e}^{-n\left(1-\ln 2+H(\rho)\right)}$.

Or, $0 < \rho < \rho_0 \Longrightarrow -1 < H(\rho) < \ln 2 - 1 < 0 \Longrightarrow 1 - \ln 2 + H(\rho) < 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n\left(1-\ln 2+H(\rho)\right)} = +\infty$

et par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\times\mathrm{e}^{-n\left(1-\ln 2+H(\rho)\right)} = +\infty$.

Bilan : pour $0 < \rho < \rho_0$, on a : $\lim_{n\to+\infty}\left|f_\rho(y_n) - P_{f_\rho,n}(y_n)\right| = +\infty$.

b) Conséquence de la question précédente !!!