



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur Épreuves ESC : ESC SAINT ETIENNE

CODE ÉPREUVE :

292

ESC_MATS

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

mardi 16 Mai 2006, de 14 h. à 18 h.

N.B.

Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Les questions 2, 3 et 4 sont indépendantes de la question 1.

On considère la matrice $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme h de \mathbb{R}^3 représenté par la matrice H

relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 . On note également $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$.

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n , il existe deux réels a_n et b_n tels que

$$H^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 & b_n \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ b_n & 0 & a_n + 2b_n \end{pmatrix} \text{ et exprimer } a_{n+1} \text{ et } b_{n+1} \text{ en fonction de } a_n \text{ et } b_n .$$

- (b) Pour tout entier naturel n , exprimer b_{n+2} en fonction de b_{n+1} et b_n , puis en déduire b_n en fonction de n , λ_1 et λ_2 .

- (c) Pour tout entier naturel non nul n , exprimer a_n en fonction de n , λ_1 et λ_2 .

2. (a) Montrer que H est diagonalisable.

- (b) Montrer par la méthode du pivot que les valeurs propres de H sont -2 , λ_1 et λ_2 .

- (c) Déterminer une base de \mathbb{R}^3 formée de vecteurs propres de h .

Justifier que cette base est orthogonale pour le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^3 .

3. On considère ici l'application $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y, z) \mapsto {}^t X H X \text{ où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- (a) Justifier que q est une forme quadratique et exprimer $q((x, y, z))$ en fonction de x, y, z .

- (b) Que peut-on dire du signe de q ? Justifier sa réponse.

4. On considère le sous-ensemble D de \mathbb{R}^3 défini par $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]-1; +\infty[$, ainsi que

la fonction f définie sur D par : $f((x, y, z)) = x \ln(1+z) + (y-1)^2(z-1) + 2z$.

- (a) Montrer que f est de classe C^2 sur D .

- (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .
Montrer que f ne présente qu'un point critique M_0 .

- (c) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f .
En déduire la Hessienne de f au point M_0 .

- (d) Le point M_0 est-il un maximum, un minimum, ou un point col pour f ?

EXERCICE 2

On considère un réel $\alpha > 0$ et la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par : $u_n = \frac{1}{n \ln^{\alpha+1}(n)}$.

On note, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $S_n = \sum_{k=2}^n u_k$.

1. Soit la fonction f définie sur $I =]1; +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{\alpha \ln^\alpha(x)}$.

- (a) Montrer que f est de classe C^2 sur I et calculer sa dérivée f' .
Montrer que f est concave sur I .
- (b) Etudier la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale impropre $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln^{\alpha+1}(t)} dt$.
En déduire la nature de la série de terme général u_n .
- (c) Soit un entier $k \geq 2$. Montrer que pour tout réel $t \in [k; k+1]$, $u_{k+1} \leq f'(t)$.
- (d) En déduire que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_{k+1} \leq \frac{1}{\alpha \ln^\alpha(k)} - \frac{1}{\alpha \ln^\alpha(k+1)}$.

Dans toute la suite, on note $L = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

2. (a) Justifier l'existence de R_n . Exprimer R_n à l'aide de L et S_n .

(b) Soit p et n deux entiers tels que $2 \leq n < p$:

Montrer grâce au 1.d. que : $\sum_{k=n+1}^p u_k \leq \frac{1}{\alpha \ln^\alpha(n)} - \frac{1}{\alpha \ln^\alpha(p)}$.

(c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $0 \leq L - S_n \leq \frac{1}{\alpha \ln^\alpha(n)}$.

3. (a) Montrer que $\frac{1}{\alpha \ln^\alpha(n)} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \exp\left(\frac{1}{\alpha \varepsilon}\right)$.

(b) Compléter les parties pointillées du programme Turbo-Pascal suivant afin qu'il demande deux réels strictement positifs α et ε et affiche un entier naturel n et une somme partielle S_n tels que l'écart entre S_n et L soit inférieur à ε : (on rappelle que **trunc** est la fonction partie entière).

program esc2006;

var

S , epsilon , alpha : real ;

k , n : integer ;

begin

writeln (.....) ;

readln (.....) ;

readln (.....) ;

n := trunc (exp (exp (.....))) + 1 ;

S := 0 ;

for k := 2 to n do ;

writeln (.....) ;

end .

(c) On suppose que les valeurs $\alpha = 10$ et $\varepsilon = 10^{-6}$ ont été entrées.
Y aura-t-il une erreur due à un débordement à l'exécution de ce programme ?

(on prendra 2^{15} comme plus grand entier possible pour le type **integer** et on donne $\ln(2) \approx 0,69$)

EXERCICE 3

Le préliminaire n'est utilisé qu'en 2(e) et 2(f). Toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) .

1. Préliminaire :

Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires admettant une espérance $E(Y_n)$ et une variance $V(Y_n)$.

On suppose en outre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_n) = m$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(Y_n) = 0$. (m étant une constante réelle).

- Montrer que $E((Y_n - m)^2) = V(Y_n) + (E(Y_n) - m)^2$.
- En déduire par inégalité de Markov que pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|Y_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Y_n) + (E(Y_n) - m)^2}{\varepsilon^2}$.
- Montrer alors que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à m .

Dans la suite de cet exercice on considère une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables indépendantes et de même loi.

Pour tout entier naturel non nul n , on note M_n la variable aléatoire définie sur Ω par $M_n(\omega) = \max_{1 \leq i \leq n} X_i(\omega)$.

(M_n prend donc pour valeur la plus grande des valeurs prises par X_1, X_2, \dots, X_n et on remarque que $M_1 = X_1$).

2. On suppose ici que les variables $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$.

On note $q = 1 - p$.

- Montrer que $(M_2 = 0) = ((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$ et en déduire la loi de M_2 .
- Montrer plus généralement que M_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - q^n$.
- Soient r et s deux entiers tels que $1 \leq r < s$. Montrer que si $(M_r = 1)$ alors $(M_s = 1)$.
En déduire $E(M_r M_s) = 1 - q^r$, puis calculer la covariance $\text{cov}(M_r, M_s)$.
- Donner la matrice de variance-covariance des variables (M_1, M_2, \dots, M_n) .
- Déduire du préliminaire que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 1.
- Montrer que $(n(1 - M_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

3. On suppose ici que les variables $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont des variables à densité indépendantes, de loi uniforme sur $[0; 1]$.

- Rappeler la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0; 1]$.
- En déduire que pour tout réel x de $[0; 1]$, $P(M_n \leq x) = x^n$.
Montrer que M_n est une variable à densité.
- Soit ε un réel de $]0; 1]$. Calculer $P(|M_n - 1| \leq \varepsilon)$.
- En déduire que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 1.
- Soit α un réel positif.
 - Soit n un entier strictement supérieur à α .
Montrer que $P(n(1 - M_n) \leq \alpha) = 1 - (1 - \frac{\alpha}{n})^n$.
 - Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{\alpha}{n})^n = e^{-\alpha}$.
 - En déduire que $(n(1 - M_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.