MATHÉMATIQUES I, session 2017

Option Économique

École conceptrice : EMLYON

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants.

L'exercice 1 (analyse), composé de quatre parties, propose d'étudier une fonction réelle d'une variable réelle, une suite et une série, des intégrales, et enfin une fonction réelle de deux variables réelles.

Partie I

La partie I propose l'étude d'une fonction réelle d'une variable réelle et celle de l'existence et de l'unicité d'une solution d'une équation.

1.a. Grossières erreurs de calcul, par incompréhension de la notation e ou de la notation e $\ln x$. Des candidat(e)s confondent e et e^x, e $\ln x$ et $\mathrm{e}^{\ln x}$.

1.b. Question correctement résolue lorsque les réponses à la question a. étaient exactes.

2. La limite de f en $+\infty$ est trop souvent affirmée sans preuve.

3. Quelques tracés fantaisistes.

4.a. Le signe de $u'(x)$ est trop souvent affirmé sans preuve, par confusion entre les inégalités $\mathrm{e}^x > 1$ et $\mathrm{e}^x > 0$.

4.b. Le caractère strict est ici nécessaire.

Partie II

La partie II propose l'étude d'une suite itérative puis celle d'une série.

5. L'inégalité $u_n \geqslant 2$ est en général correctement obtenue par récurrence, mais l'existence de u_n est alors souvent oubliée ou escamotée.

6.a Trop d'affirmations d'inégalités non établies.

6.b. Il y a quelquefois confusion entre la croissance de g et la positivité de g.

7. La résolution est souvent grossièrement fausse, par confusion entre limite d'une fonction et limite d'une suite.

8. Question à peu près correctement traitée, lorsqu'elle est abordée.

9.a. Des démonstrations fausses, utilisant des comportements locaux.

Une méthode classique et efficace consiste ici à étudier les variations des fonctions $x \longmapsto x-2\ln x$ et $x \longrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^x}{3} - x$, pour $x \in [2\,;+\infty[$.

9.b. Question rarement abordée. Il suffit pourtant d'utiliser la question précédente et d'effectuer des opérations licites sur les inégalités.

9.c. Cette question n'a été que peu abordée et presque jamais résolue.

Confusion entre $\dfrac{1}{u_n}$ et $\dfrac{1}{n}$.

Partie III

La partie III introduit des intégrales.

10. Les candidat(e)s oublient trop souvent d'indiquer que la fonction f est continue sur $]0\,;1]$.

Beaucoup d'erreurs de calcul.

Dans quelques copies, le résultat obtenu est strictement négatif, alors que la fonction f est à valeurs strictement positives.

11. La divergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est immédiate, si l'on rappelle que $f(x) \geqslant \mathrm{e}$, ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

12. Question presque jamais abordée ni résolue.

Partie IV

La partie IV porte sur un extremum local d'une fonction réelle de deux variables réelles.

13. Le calcul des dérivées partielles premières de F est en général correct.

Mais la résolution du système d'équations définissant les points critiques n'est jamais réalisée correctement. Dans la majorité des copies, le système d'équations $\begin{cases} f'(x) = y \\ f'(y) = x \end{cases}$ est remplacé, sans explication ou avec explication fausse, par le système d'équations $\begin{cases} f'(x) = x \\ f'(y) = y \end{cases}$ et les candidat(e)s n'obtiennent que l'existence d'un point fixe et non l'unicité.

L'unicité, qui est difficile, peut être établie soit par un raisonnement par l'absurde, soit par la considération de $f' \circ f'$.

14.a. La définition de la hessienne est connue et le calcul de la hessienne au point critique (α, α) est en général correct.

14.b. Trop de candidat(e)s croient, à tort, que les valeurs propres d'une matrice symétrique se lisent sur la diagonale, en confondant probablement matrice symétrique et matrice diagonale.

L'exercice 2 (algèbre), composé de quatre parties, propose l'étude d'endomorphismes de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et fait une large place au registre matriciel.

Partie I

La partie I, très élémentaire, étudie un endomorphisme représenté par une matrice diagonale.

1. Pour montrer que a est une application de E dans E, la considération des degrés est indispensable.

La linéarité de a est en général bien vue.

2.a. Question facile, résolue dans la quasi-totalité des copies.

2.b. Quelques erreurs, par confusion du rang et de l'ordre, pour une matrice carrée.

3. Trop de candidat(e)s confondent E et $\mathbb{R}^3$. Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(a)$ et $\operatorname{Im}(a)$ doivent être exprimés à l'aide de polynômes et non à l'aide de triplets.

Partie II

La partie II propose l'étude d'un autre endomorphisme fortement lié à la dérivation.

Dans cette partie II, les candidat(e)s n'ont pas perçu la logique et l'enchaînement des questions, mais les réponses sont quand même souvent correctes.

4. Les candidat(e)s passent le plus souvent par le registre matriciel et la question est correctement résolue dans l'ensemble.

5.a. Si l'on passe par les matrices, bien remarquer que B est triangulaire.

5.b. La résolution est en général correcte, soit par une raisonnement par l'absurde, soit par détermination de la dimension du seul sous-espace propre.

Partie III

La partie III étudie un endomorphisme diagonalisable.

6., 7. Questions très faciles, résolues dans la quasi-totalité des copies.

8.a. Question très facile, mais qui n'a été traitée que dans un nombre insuffisant de copies.

Les consignes concernant les matrices D et P doivent évidemment être respectées.

8.b. Comme pour la question 3. il y a trop souvent confusion entre polynôme et triplet.

Partie IV

La partie IV utilise le lien entre endomorphisme et matrice.

9. Il y ici de grossières erreurs, par incompréhension des notations, en particulier pour la composition des fonctions.

10. Question abordée plus fréquemment que la précédente, souvent par un long calcul matriciel direct, ce qui n'est pas faux, mais n'est pas dans la logique de l'énoncé.

L'exercice 3 (probabilités), composé de quatre parties, propose d'abord une simulation informatique, puis étudie plusieurs variables aléatoires discrètes et se termine par une convergence en loi.

Partie I

La partie I donne une simulation informatique, demande de compléter un programme et teste les compétences des candidat(e)s sur ce sujet.

1.Question trop peu abordée.

Il faut ici comparer x avec un quotient, $\dfrac{r}{b+r}$, et non avec un nombre entier, r ou b.

2. Question peu abordée, et avec confusion entre le nombre d'expériences (1000) et le nombre de lancers par expérience (10).

Partie II

La partie II étudie deux variables aléatoires discrètes assez simples.

3.a. La loi géométrique n'a rien à faire ici.

Il s'agit de citer la formule des probabilités composées et de l'appliquer correctement.

3.b. De grossières erreurs sur la notion de convergence pour une série.

4. Question peu abordée. Le raisonnement correct est du même genre que pour la question 3.a.

Partie III

La partie III étudie d'autres variables aléatoires moins simples, en commençant par les cas $n = 1$, $n = 2$, et constitue l'essentiel de l'exercice.

5. Grossières confusions entre une variable aléatoire X_k, un événement $[X_k = 1]$, une probabilité $P([X_k = 1])$.

L'écriture $P(X_k)$ n'a aucun sens.

L'écriture $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[X_k = 1]$ n'a aucun sens.

6. Question souvent résolue, avec quelques erreurs de calcul élémentaire sur les fractions, pour la variance.

7.a. Question facile, assez souvent résolue. Il y a cependant quelquefois ignorance de la définition de la loi d'un couple de variables aléatoires, avec confusion entre (X_1, X_2) et $X_1 + X_2$.

L'écriture $X_1 \cap X_2$ n'a aucun sens.

7.b. Question facile, en utilisant le résultat de la question a. et la notion de loi marginale ou la formule des probabilités totales.

Les correcteurs ont rencontré ici quelquefois des probabilités strictement supérieures à 1 ...

7.c. Un blabla ne suffit pas. Il faut ici revenir à la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires.

8.a. Question peu abordée. Le raisonnement correct est du même genre que pour les questions 3.a. et 4.

8.b. Question peu abordée. Les explications manquent de clarté.

9. D'assez nombreuses copies, après des échecs sur les questions précédentes, ont donné une solution correcte de cette question assez facile, utilisant le résultat donné dans l'énoncé pour la question 8.b.

10.a. De même que pour la question précédente, celle-ci a été assez bien résolue.

10.b. Peu de copies abordent cette question. Il s'agit d'appliquer la formule des probabilités totales en citant le système complet d'événements utilisé, puis de reconnaître l'intervention des deux sommations $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP([S_n = k])$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P([S_n = k])$.

10.c. Quelques candidat(e)s résolvent correctement cette question facile, en utilisant le résultat précédent.

Partie IV

La partie IV étudie une convergence en loi pour une suite de variables aléatoires discrètes.

Cette dernière partie n'est abordée que dans une petite minorité des copies.

11. Question facile, les variables aléatoires T_n étant à valeurs dans $[0\,;1]$.

12. L'intervention d'une partie entière est rarement perçue.

13. Cette dernière question n'est abordée que dans de rares copies, et il y a alors quelquefois confusion entre x^2 et x.

L'équipe de conception s'est attachée à produire un sujet conforme au programme ECE, progressif dans la difficulté des questions, permettant aux candidat(e)s de valoriser leurs compétences : compréhension de la problématique, connaissance du cours, aptitude au raisonnement logique, mise en oeuvre des techniques de calcul, communication écrite et qualités de synthèse.

Les correcteurs ont estimé qu'il s'agit d'un très bon sujet, exempt d'erreur d'énoncé, intéressant, équilibré, progressif, complet, varié et couvrant une très large partie des connaissances exigibles des deux années de préparation. Ils ont trouvé aussi le sujet bien gradué en difficulté, conforme à la lettre et à l'esprit du programme, très bien rédigé, bien adapté à la voie économique, et un peu long, ce dont il a été tenu compte dans l'établissement du barème.

Le sujet évalue la connaissance du programme, mais aussi, grâce à quelques questions ouvertes, la capacité à résoudre des problèmes et à synthétiser, et il a été valorisant pour les candidat(e)s sérieux.

Une bonne gradation de la difficulté a permis aux candidat(e)s de mettre en valeur leur travail de préparation des deux années dans les questions de facture classique, et a aussi permis, par des questions plus fines, aux meilleur(e)s de se dégager.

Les correcteurs ont constaté une très grande hétérogénéité des copies : il y a de bonnes copies, de mauvaises copies et une proportion moins importante qu'autrefois de copies moyennes. L'écart entre les très bonnes copies et les autres s'est encore creusé.

L'aptitude au calcul, les capacités à relier différentes questions, à argumenter et à synthétiser font partie des critères d'évaluation des copies.

Les trois exercices sont abordés dans la quasi-totalité des copies, quelques candidat(e)s ont fait l'impasse sur le troisième.

Trop de candidat(e)s essaient d'appliquer des recettes, sans raisonnement et sans se rendre compte de contradictions dans leur texte. Les notions mathématiques sont souvent confondues et il y a trop d'erreurs de calcul.

Dans l'ensemble, la présentation a paru convenable, malgré quelques copies très peu soignées ou illisibles. Mais la rédaction est souvent trop approximative et les candidat(e)s manquent de rigueur dans les notations, les phrases mathématiques et l'argumentation.

Il est impératif que les questions soient numérotées selon l'énoncé et clairement séparées. Les résultats et les réponses doivent être mis en évidence en les encadrant proprement (à la règle).

L'éventail complet des notes a été utilisé et le sujet a joué parfaitement son rôle de sélection.

Au bilan, les candidat(e)s n'ont pas été surpris(es) et le sérieux du travail a été récompensé.

Moyenne de l'épreuve : **. / 20** .