ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION SCIENTIFIQUE

MARDI 21 MAI 2002 , de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique

est interdit pendant cette épreuve".

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants.

N.B. Il est demandé au candidat d'indiquer, **impérativement,** son numéro d'inscription sur les copies.

EXERCICE 1

On rappelle que lorsque Y est une variable aléatoire admettant une espérance $E(Y)$ et un écart-type non nul σ_Y , on note Y^* la variable centrée réduite associée à Y , définie par $Y^* = \dfrac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}$.

Soit n un entier naturel non nul.

On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \cdots, X_n$, suivant la même loi , et admettant une espérance notée m et un écart-type strictement positif notée σ .

On pose également $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Enfin on note Φ la fonction de répartition d'une variable suivant la loi normale centrée réduite.

1. (a) Montrer que S_n admet une espérance et une variance et les exprimer en fonction de n , m et σ.

   (b) En déduire l'expression de S_n^* en fonction de S_n.

Dans la suite de l'exercice, on pose pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel β :

$$p_{n,\beta} = P\left(\left| S_n^* \right| < n^{\beta} \right)$$

On cherche à étudier la limite de la suite $(p_{n,\beta})_{n\in \mathbb{N}^*}$ dans différents cas de figure.

2. On suppose $\beta = 0$.

   (a) Montrer grâce au théorème de la limite centrée que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{n,0} = \Phi(1) - \Phi(-1)$.

   (b) Donner une valeur approchée de cette limite (On donne $\Phi(1) \approx 0.8413$).

3. On suppose $\beta > 0$.

   (a) Montrer que $p_{n,\beta} = P\left(\left| S_n - n\,m \right| < \sigma . n^{\beta + \frac{1}{2}} \right)$.

   (b) Montrer en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev que $p_{n,\beta} \geq 1 - \dfrac{1}{n^{2\beta}}$.

   (c) En déduire la limite de la suite $(p_{n,\beta})_{n\in \mathbb{N}^*}$.

4. On suppose ici que $\beta < 0$, et que $X_1, X_2, \cdots, X_n$ suivent la loi normale centrée réduite.

   (a) Quelle est la loi de la variable S_n ? de la variable S_n^* ?

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul , $p_{n,\beta} = 2(\Phi(n^{\beta}) - \Phi(0))$.

   (c) Montrer en utilisant la continuité de Φ en 0 que : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{n,\beta} = 0$.

   (d) Montrer en utilisant la dérivabilité de Φ en 0 , que :

$$p_{n,\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}} . n^{\beta}$$

EXERCICE 2

Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telles que la série de terme général a_n^2 converge.

Dans cet énoncé on emploie la notation a pour désigner une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels.

1. (a) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

   (b) Pour tout réel non nul α, on considère la suite $u(\alpha)$ définie par :

   Pour tout entier naturel n, $u_n(\alpha) = \dfrac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$.

   Vérifier que les suites $u(\alpha)$ sont des éléments de E.

2. (a) Montrer que si a et b sont éléments de E, alors la série de terme général $a_n b_n$ est absolument convergente.

   (b) Soit ϕ l'application définie sur $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

   $$\phi((a,b)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n \text{ pour toutes suites } a \text{ et } b \text{ de } E.$$

   Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.
   On notera alors $< a,b >= \phi((a,b))$, et $\|.\|_2$ la norme associée à ϕ.

   (c) Montrer que pour toutes suites a et b de E, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2}\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2}$

   (d) Déterminer pour tout réel α la norme $\|u(\alpha)\|_2$, et pour tous réels α et β distincts, le produit scalaire $< u(\alpha), u(\beta) >$.

   (e) Déterminer une base orthogonale de l'espace vectoriel engendré par la famille $[u(-1), u(1), u(2)]$.

3. Pour tout entier naturel k non nul, on définit :

   F_k l'ensemble des suites réelles a telles que : pour tout entier $n \geq k$, $a_n = 0$

   G_k l'ensemble des suites réelles a de E telles que : pour tout entier $n \leq k-1$, $a_n = 0$

   (a) Montrer que $F_k \subset E$, et que F_k est un sous-espace vectoriel de E.

   (b) Déterminer une base de F_k et donner la dimension de F_k.

   (c) Montrer que G_k est un sous-espace vectoriel de E.

   (d) Soit a une suite de E. Montrer qu'il existe deux suites r et s telles que :

   $r \in F_k$, $s \in G_k$ et pour tout entier naturel, $a_n = r_n + s_n$.

   En déduire que F_k et G_k sont des espaces supplémentaires orthogonaux pour le produit scalaire ϕ.

   (e) Montrer que la suite $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de E.

   Déterminer son projeté orthogonal sur F_k pour le produit scalaire ϕ.

EXERCICE 3

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(t) = te^{-t}$ pour tout réel t positif.

1. (a) Etudier la fonction g sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer que pour tout réel strictement positif t, $g(t) \leq \dfrac{4}{t.e^2}$.

2. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, l'équation $g(t) = \dfrac{1}{n}$ admet exactement deux solutions notées ρ_n et ρ'_n et telles que : $0 < \rho_n < 1 < \rho'_n$.

3. (a) Montrer que la suite $(\rho_n)_{n \geq 3}$ converge et que sa limite est 0.
   (b) Montrer que $\rho_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
   (c) Montrer que la suite $(\rho'_n)_{n \geq 3}$ diverge.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$f((x,y)) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2+4y^2}}}{x^2 + 4y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f((0,0)) = 0.$$

1. (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   (b) Montrer en utilisant la question 1.b de la partie 1 que f est continue en $(0,0)$.

2. (a) Déterminer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   (b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que (x,y) est un point critique pour f (c'est-à-dire susceptible d'être un extremum pour f) si et seulement si : $x^2 + 4y^2 = 1$ *ou* $(x,y) = (0,0)$.

4. En utilisant la fonction g étudiée dans la première partie :
   (a) Trouver le minimum global de f ainsi que l'ensemble P des points le réalisant.
   (b) Trouver le maximum global de f ainsi que l'ensemble E des points le réalisant.

5. On note pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :
   E_n l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f((x,y)) = \dfrac{1}{n}$.
   On note également D la demi-droite de $\mathbb{R}^2$ définie par : $D = \left\{(x,y) / x \geq 0 \text{ et } y = \frac{1}{2}x\right\}$.

   Montrer que : $E_n \cap D = \left\{\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{\rho_n}}, \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2}{\rho_n}}\right), \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{\rho'_n}}, \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2}{\rho'_n}}\right)\right\}$

   où ρ_n et ρ'_n sont les valeurs définies dans la question 2 de la partie 1.