Code sujet : 297

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : EDHEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

mardi 3 mai 2016, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1) a) Dresser le tableau de variation de f, limites comprises.

b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est parfaitement défini et strictement positif.

2) Les scripts suivants renvoient, pour celui de gauche, la valeur 5, et pour celui de droite, la valeur 6. Que sait-on de u_5 et u_6 ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

```
u = 1
n = 0
while u > 0.00001
u = exp(-u)/u
n = n+1
end
disp(n)
```

```
u = 1
n = 0
while u < 100 000
u = exp(-u)/u
n = n+1
end
disp(n)
```

3) a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = e^{-x} - x^2$.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une seule solution, que l'on notera α, sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer que $\dfrac{1}{e} < \alpha < 1$.

4) a) Établir les deux inégalités : $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.

b) En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

5) On pose : $h(x)=\begin{cases}(f\circ f)(x) \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$.

a) Déterminer $h(x)$ pour tout réel x strictement positif et vérifier que h est continue en 0.

b) Résoudre l'équation $h(x)=x$, d'inconnue x élément de $\mathbb{R}_+$.

c) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Montrer par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$.

Exercice 2

1) Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f\circ(f-Id)^2=0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

a) Déterminer $(f-Id)^2+f\circ(2Id-f)$.

b) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $x=(f-Id)^2(x)+\big(f\circ(2Id-f)\big)(x)$.

c) Utiliser ce dernier résultat pour établir que $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.

2) Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que : $f\circ(f-Id)\circ(f-4Id)=0$.

a) Déterminer un polynôme P du premier degré vérifiant $\frac{1}{4}(X-1)(X-4)+X\,P(X)=1$.

b) En déduire que : $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.

3) Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f, dont le degré est égal à p (avec $p\geq 2$), et tel que $P(0)=0$ et $P'(0)\neq 0$.

a) Montrer qu'il existe p réels $a_1,\ldots,a_p$ avec $a_1\neq 0$, tels que $P=a_1X+\ldots+a_pX^p$.

b) En déduire que $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}$, puis établir que $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.

c) En quoi cette question est-elle une généralisation des deux questions précédentes ?

Exercice 3

Les questions 1) et 2) sont indépendantes des suivantes.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres m et σ^2 (avec $\sigma>0$). On rappelle qu'une densité de X est la fonction φ_{m,σ^2} définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi_{m,\sigma^2}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

On suppose que l'on ne connaît pas les paramètres $\theta_1=m$ et $\theta_2=\sigma^2$ et on souhaite les estimer par une méthode appelée méthode du maximum de vraisemblance.

Pour ce faire, on considère un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de la loi de X, avec $n\geq 2$. On rappelle que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et suivent toutes la même loi que X.

On appelle vraisemblance du couple (θ_1,θ_2), la fonction notée L définie par :

$$L(\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{\theta_1,\theta_2}(x_i)\text{, où } x_1, \ldots, x_n \text{ sont des réels donnés}$$

1) Donner l'expression de $L(\theta_1,\theta_2)$, puis celle de $\ln\big(L(\theta_1,\theta_2)\big)$ en fonction de θ_1, θ_2 et $x_1, \ldots, x_n$.

2) a) Justifier que la fonction f: $(\theta_1,\theta_2)\mapsto\ln\big(L(\theta_1,\theta_2)\big)$, définie sur l'ouvert $U=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, est de classe C^2 sur U.

b) Montrer que f admet un seul point critique $A=\left(\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_2}\right)$ sur U tel que :

$$\widehat{\theta_1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \text{ et } \widehat{\theta_2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\widehat{\theta_1}^2$$

c) Déterminer les valeurs des dérivées partielles d'ordre 2 de f en A.

On vérifiera en particulier que : $\partial_{2,2}^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = \dfrac{-n}{2\,\widehat{\theta_2}^{\,2}}$.

d) En déduire que f admet un maximum local en $\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$.

e) Expliquer pourquoi la fonction L admet aussi un maximum local en $\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$.

On pose dorénavant $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $Z_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X_n}^2$.

3) Vérifier que $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de m.

4) Montrer que Z_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de σ^2.

5) On se propose, dans cette question, de montrer que Z_n est un estimateur convergent de σ^2.

a) Rappeler pourquoi la suite $\left(\overline{X_n}\right)$ converge en probabilité vers m. Qu'en déduire pour la suite $\left(\overline{X_n}^2\right)$? Justifier.

b) Montrer que X possède un moment d'ordre 4. En déduire que la suite $\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ converge en probabilité vers $\sigma^2 + m^2$.

c) Établir que, pour tout ε strictement positif, on a :

$$\left(\left|Z_n - \sigma^2\right| \geq \varepsilon\right) \subset \left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sigma^2 + m^2)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(\left|\overline{X_n}^2 - m^2\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

d) Déduire des questions précédentes que Z_n est un estimateur convergent de σ^2.

Problème

Partie 1 : résultats préliminaires

1) Pour chaque entier naturel n, on considère une matrice A_n de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dont l'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est noté $a_{i,j}(n)$, ainsi qu'une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dont l'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est $a_{i,j}$.

On suppose que la suite de matrices (A_n) converge vers la matrice A, c'est-à-dire que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!],\ \lim_{n \to +\infty} a_{i,j}(n) = a_{i,j}$$

Soient B et C deux autres matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, indépendantes de n.

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} BA_n = BA$. On admet que ceci reste vrai si B appartient à $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$.

On admet que $\lim\limits_{n \to +\infty} A_nC = AC$ et que ceci reste vrai si C appartient à $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

On admet également que $\lim\limits_{n \to +\infty} BA_nC = BAC$.

2) Montrer que, si une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est telle que, pour tout i de $[\![1,4]\!]$, $\sum_{j=1}^{4} a_{i,j}$ est une constante c, alors c est valeur propre de A.

3) Montrer que si une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est diagonalisable, alors la somme de ses valeurs propres, (chacune étant comptée un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre associé) est égale à la trace de A.

Partie 2 : étude de la matrice d'une chaîne de Markov

On considère deux urnes U et V contenant chacune 3 boules. Au départ, l'urne U contient 3 boules blanches et l'urne V contient 3 boules noires.

On effectue une suite de tirages dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à tirer au hasard une boule de chaque urne et à la mettre dans l'autre urne (un tirage est un échange de 2 boules).

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient U avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage (c'est-à-dire après le $n^{\text{ème}}$ échange) et on a donc $X_0 = 3$.

On considère le vecteur ligne $L_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) & P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

4) Pour tout couple (i, j) d'éléments de $[\![0,3]\!]$, déterminer $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$.

5) a) Soit M la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont l'élément de la $(i+1)^{\text{ème}}$ ligne et de la $(j+1)^{\text{ème}}$ colonne est égal à $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$. Justifier soigneusement que M est la matrice donnée à la question 12).

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} = L_n M$.

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = L_0 M^n$.

6) a) Montrer sans calcul que 1 est valeur propre de M.

b) On considère les vecteurs $E_1 = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Montrer que ${}^tE_1$ et ${}^tE_2$ sont vecteurs propres de M et donner les valeurs propres associées.

c) Montrer que, si M est diagonalisable, alors M possède une quatrième valeur propre λ que l'on déterminera. Vérifier que λ est effectivement valeur propre de M et conclure que M est diagonalisable.

Partie 3 : recherche d'une loi stationnaire

7) Justifier qu'il existe une matrice Q inversible, dont la première colonne ne contient que des "1", et une matrice D diagonale telles que $M = QDQ^{-1}$.

8) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} M^n = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$.

9) Soit $L = (\ell_1 \ \ \ell_2 \ \ \ell_3 \ \ \ell_4)$ la première ligne de Q^{-1}.

a) En utilisant la relation $Q^{-1}M = DQ^{-1}$, montrer que : $\ell_1 = \ell_4$ et $\ell_2 = \ell_3 = 9\ell_4$.

b) Conclure, en considérant le produit $Q^{-1}Q$, que $\ell_4 = \dfrac{1}{20}$.

10) Déduire de ce qui précède les 16 coefficients de la matrice $\lim\limits_{n \to +\infty} M^n$.

11) On considère une autre expérience aléatoire qui consiste à tirer 3 boules, une par une et sans remise, dans une urne qui en contient 6, dont 3 sont blanches et 3 sont noires.

On note B_k (resp. N_k) l'événement « obtenir une boule blanche (resp. noire) au $k^{\text{ème}}$ tirage » et X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

a) Quelle est la loi de X ?

b) Vérifier que $\begin{pmatrix} P(X=0) \\ P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tM$, associé à la valeur propre 1.

c) Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers X.

12) On rappelle que la commande `X = grand(n, 'markov' , M, X0)` renvoie les n premiers états suivant l'état initial X_0, d'une chaîne de Markov de matrice M et on rappelle également que `Scilab` assimile un booléen vrai au nombre 1 et un booléen faux au nombre 0.

On considère le script suivant :

```
n = input('entrez la valeur de n :')
M = [0,1,0,0 ; 1/9,4/9,4/9,0 ; 0,4/9,4/9,1/9 ; 0,0,1,0]
X = grand(n,'markov',M,4)-1
f = sum(X==0)/n
disp(f)
```

De quelle valeur exacte le contenu de f est-il proche lorsque n est assez grand ?

IMPRIMERIE NATIONALE – 16 1175 – D'après documents fournis