

ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES
OPTION SCIENTIFIQUE

JEUDI 4 MAI 2000 , de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

**"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique
est interdit pendant cette épreuve".**

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants dont les différentes parties sont elles-mêmes largement indépendantes.

N.B. Il est demandé au candidat d'indiquer, **impérativement**, son numéro d'inscription sur les copies.

Exercice 1

Partie A

1. Soit ϕ la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par : $\phi(x) = \ln x$.

Vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \phi^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{x^k}$.

2. Montrer alors que : $\forall t \in [0; 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \ln(1+t) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} t^k \right| \leq \frac{t^{n+1}}{n+1}$.

3. En déduire que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ (avec $n \geq 1$) converge et donner sa somme.

Partie B

On définit sur \mathbb{R} la fonction numérique réelle f par : $\begin{cases} f \text{ est périodique de période } 2, \\ \text{pour tout } x \in]-1; 1], f(x) = x \cdot (1 - |x|) \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} et dérivable sur $]-1; 1]$.

2. Donner les variations de f sur $]-1; 1]$.

3. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], f(x+n) = (-1)^n \cdot f(x)$.

4. On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm. Représenter les points de \mathcal{C} d'abscisse comprise entre -2 et 3.

Partie C

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\begin{cases} g(x) = \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 1. \end{cases}$

1. Montrer que g est continue sur \mathbb{R} .

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \int_n^{n+1} g(x) dx$.

En utilisant le changement de variable $t = x - n$ et la question 3. de la **partie B**, montrer que,

pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (-1)^n \cdot \int_0^1 \frac{f(t)}{t+n} dt$.

3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{6(n+1)} \leq |u_n| \leq \frac{1}{6n}$.

La série de terme général u_n est-elle absolument convergente ?

4. (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{x \cdot (1-x)}{x+n} = -x + (n+1) - \frac{n^2+n}{x+n}$.
- (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
5. En utilisant un développement limité de u_n en $\frac{1}{n}$, donner la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré au plus n . Soit f l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = P(X+1) + X \cdot P'(X).$$

Partie A

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

Partie B

1. Quelles sont les valeurs propres de f ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. (a) Montrer qu'il existe un polynôme P_n non nul de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $f(P_n) = (n+1) \cdot P_n$.
(b) Vérifier que P_n est de degré n .
3. (a) Montrer que : $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, f(P_n^{(k)}) = (n+1-k) \cdot P_n^{(k)}$.
(b) En déduire que $(P_n^{(k)})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de f .
(c) Donner la matrice D de f dans cette base.

Partie C

Dans cette partie, $n = 2$. On définit les polynômes E_0, E_1 et E_2 par :

$$\begin{cases} E_0 = 1 \\ E_1' = E_0 \text{ et } E_1(1) = 2 \cdot E_1(0) \\ E_2' = E_1 \text{ et } E_2(1) = 3 \cdot E_2(0) \end{cases}$$

1. Expliciter les polynômes E_1 et E_2 .
2. Montrer que (E_0, E_1, E_2) est une base \mathcal{B} de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de f .

3. Calculer les coordonnées du polynôme $Q(X) = X^2 + X + 1$ dans la base \mathcal{B} .
4. Déterminer le polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que : $P(X + 1) + X \cdot P'(X) = X^2 + X + 1$.

Exercice 3

p et q désignent deux réels avec $p \in]0; 1[$ et $q = 1 - p$.

On considère une variable aléatoire réelle X ayant pour loi : $\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = p \cdot q^k \end{cases}$.

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2. On pose $Y = \frac{1}{X+1}$.

(a) Déterminer la loi de Y .

(b) Justifier l'égalité : $\forall x \in [0; 1[, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

En déduire que : $\forall t \in [0; 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^k}{k} + \ln(1-t) = \int_0^t \frac{x^{n+1}}{x-1} dx$.

(c) Montrer que : $\forall t \in [0; 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_0^t \frac{x^{n+1}}{x-1} dx \right| \leq \frac{1}{1-t} \cdot \frac{t^{n+2}}{n+2}$.

Prouver alors que : $\forall t \in [0; 1[, \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} = -\ln(1-t)$.

(d) Calculer $E(Y)$.

3. Soit Z une variable aléatoire réelle à valeurs dans \mathbb{N} telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Z sachant $(X = k)$ est uniforme sur $[[0; k]]$.

(a) Pour $z \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $P(Z = z/X = k)$.

(b) Déterminer la loi de Z (chaque probabilité sera laissée sous forme d'une somme).

(c) Calculer $E(Z)$.

4. Soit T une variable aléatoire absolument continue à valeurs dans \mathbb{R}_+ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de T sachant $(X = k)$ est exponentielle de paramètre $k + 1$.

(a) Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}$, exprimer $P(T \leq t/X = k)$.

(b) En déduire la fonction de répartition de T .

(c) Donner alors une densité de T .

(d) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $E(T)$.